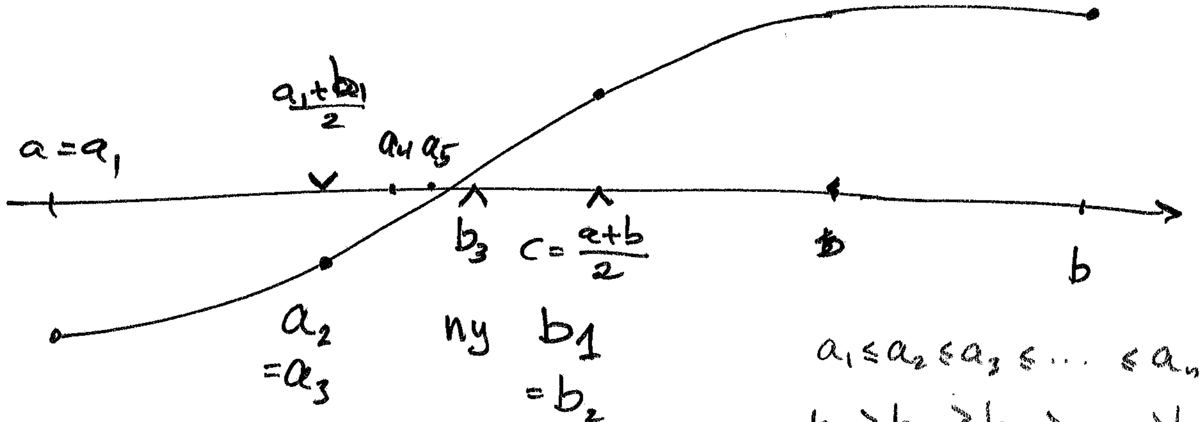
24 sep 2015 Hvordan finner vi nullpunkten?

En enkel metode: Halveringsmetoden (midtpunktsmetoden)

f kontinuerlig i $[a, b]$ $\qquad f(a) \cdot f(b) < 0$

(1)



$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n < b_n$

$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n$

$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$ nullpunktet mellom a_n og b_n.

f kont.

Starter med $a < b$

Antar $f(a) \cdot f(b) < 0$

1) $c = \frac{a+b}{2}$ punktet midt mellom a og b

2) $f(c) = 0$ da har vi funnet et nullpunkt!

3) $f(c) \neq 0$

Hvis $f(a) \cdot f(c) > 0$ erstatt a med (verdien til) c

ellers erstatt b med (verdien til) c

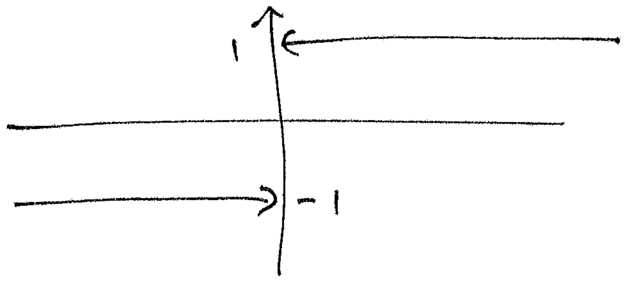
Gjenta prosedyren med nye a og b.

Vi lagde til et script som utfører denne algoritmen.

.m-filen med scriptet legges ut senere.

(2)

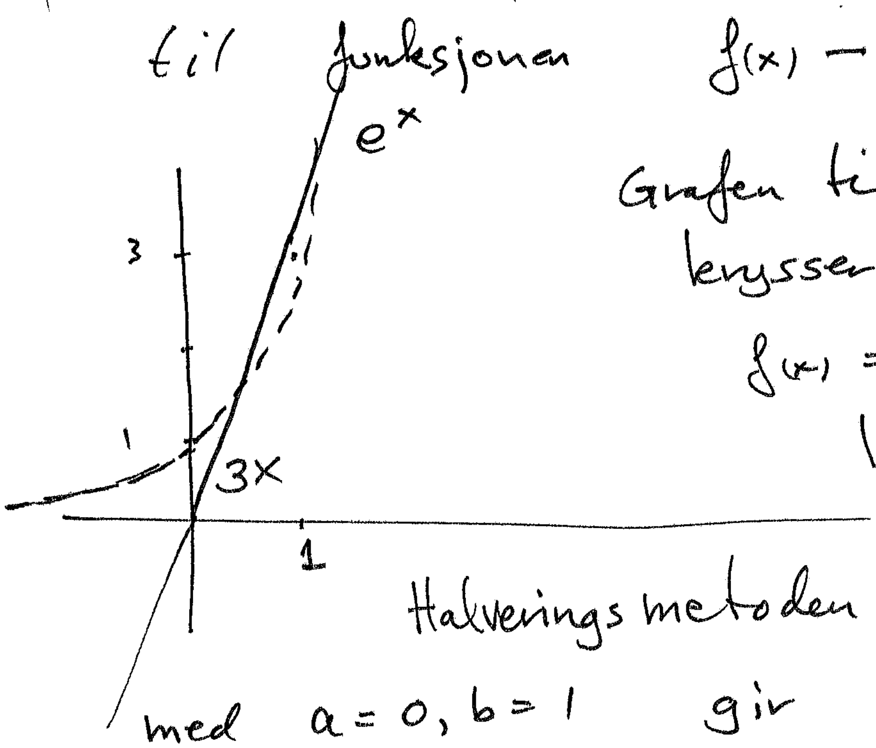
$f(x) = \frac{x}{|x|}$



$a < 0,\ b > 0$ halveringsmetoden gir en verdi nær 0.

$f(x)$ er ikkje def. i $[a, b]$ (ikkje i 0) og er heller ikkje en funksjon med nullpunkt i $[a, b]$.

Kryssningspunktene mellom grafen til $f(x)$ og $g(x)$ (har x-koordinater) som er presis null-punktene til funksjonen $f(x) - g(x)$.



Grafen til $3x$ og e^x krysser når $f(x) = \exp(x) - 3x$ er lik 0.

Halveringsmetoden med $a = 0, b = 1$ gir $x \sim 0.6190$

$a = 1, b = 2$ gir $x \sim 1{,}512$

(3)

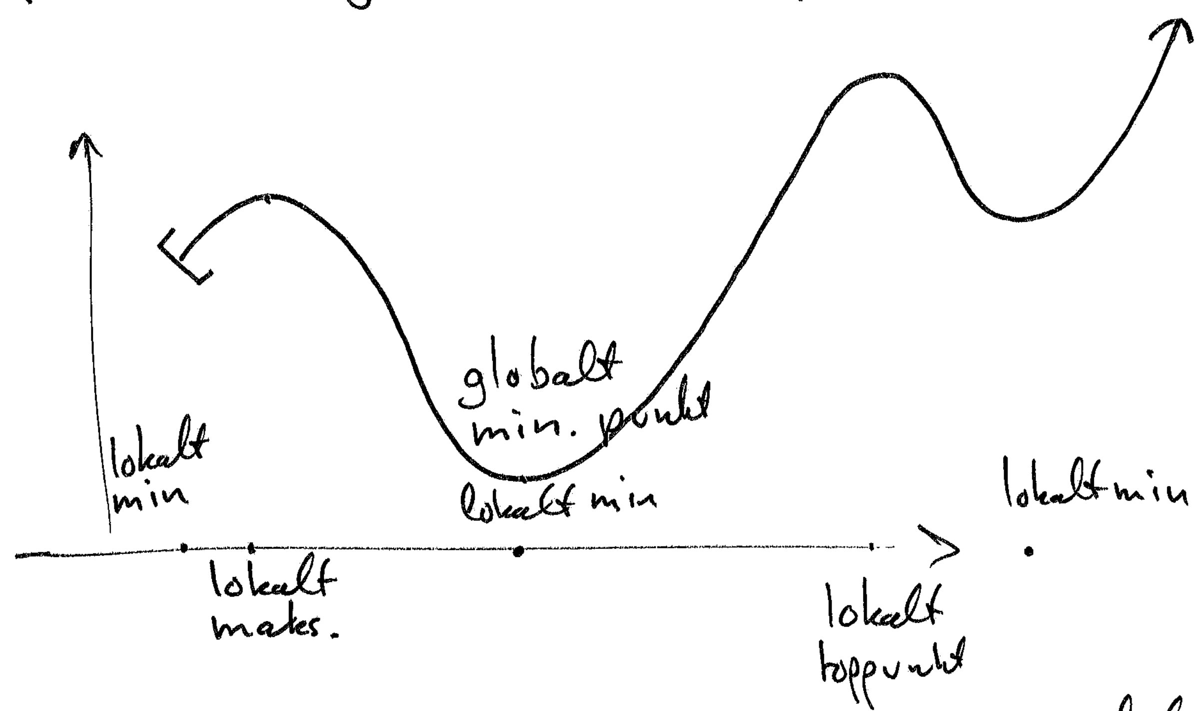
Ekstremalverdier

Funksjon f

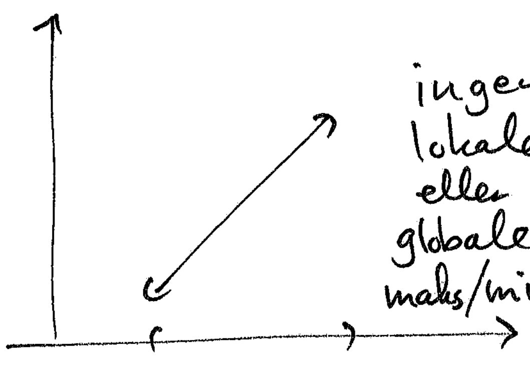
a er et maksimumspunkt for f hvis
$f(x) \le f(a)$ for alle x i D_f.

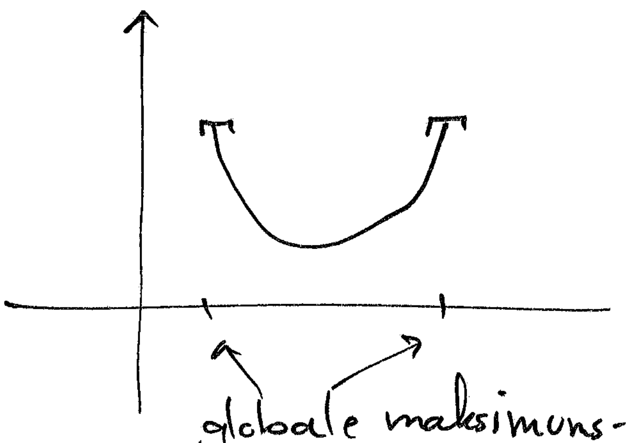
a er et lokalt maksimumspunkt for f
hvis a er et maksimumspunkt for f nær a.
$f(x) \le f(a)$ for x tilstrekkelig nær a.

Tilsvarende for minimumspunkt.

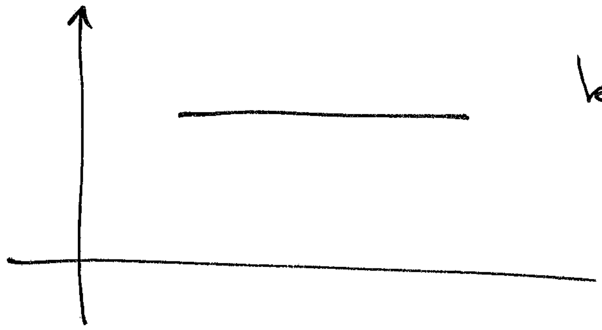


Grafen har ingen globale maks. punkt.



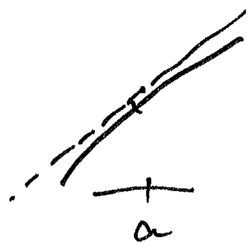


(4)



konstant horisontal graf:
Alle punkt i def.mengden globale maks og min punkt.

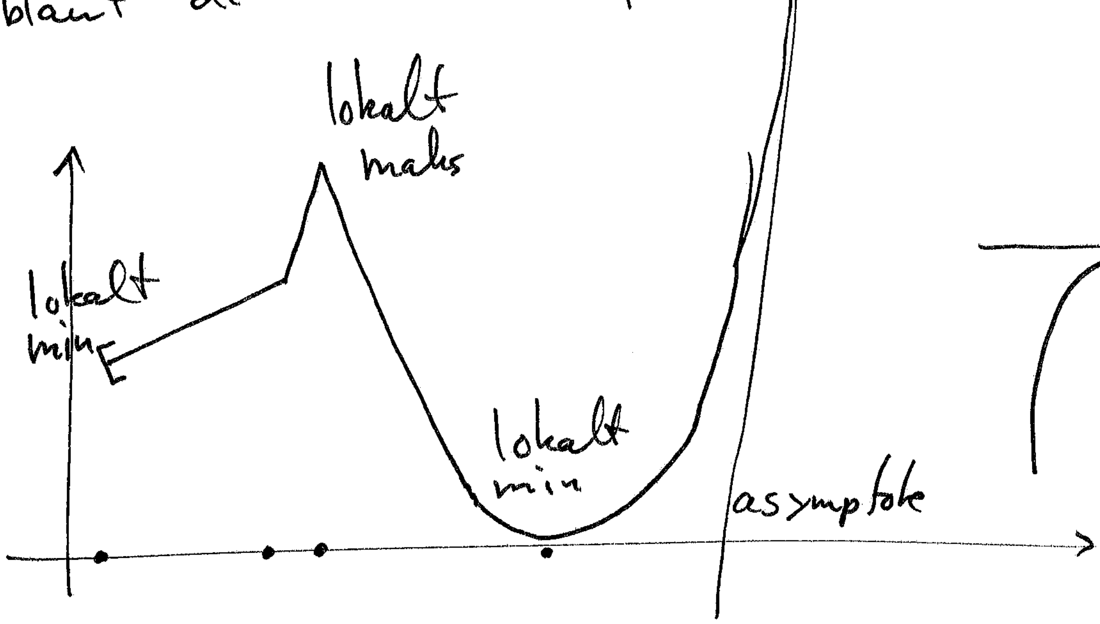
Hvis f er deriverbar i $x = a$ og $f'(a) \neq 0$, da er ikkje a et <u>ekstremalpunkt</u>.
(a et indre punkt)

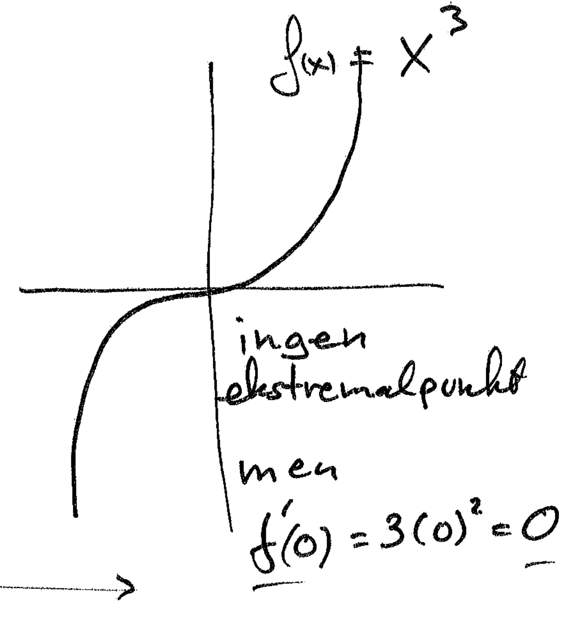


<u>Kritiske punkt</u>: - punkt hvor den deriverte er lik 0
- punkt hvor den deriverte ikke eksisterer
- Endepunkt.

<u>Resultat: Alle ekstremal punkt er kritiske punkt.</u>

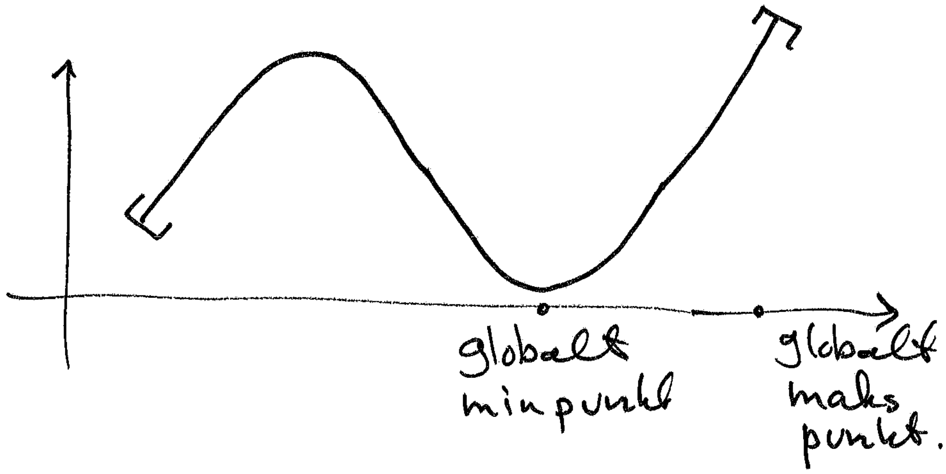
Så det er nok å lete etter ekstremalpunkter blant de kritiske punktene.

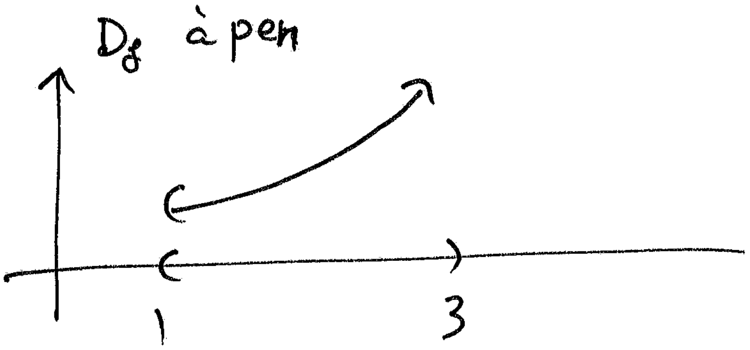


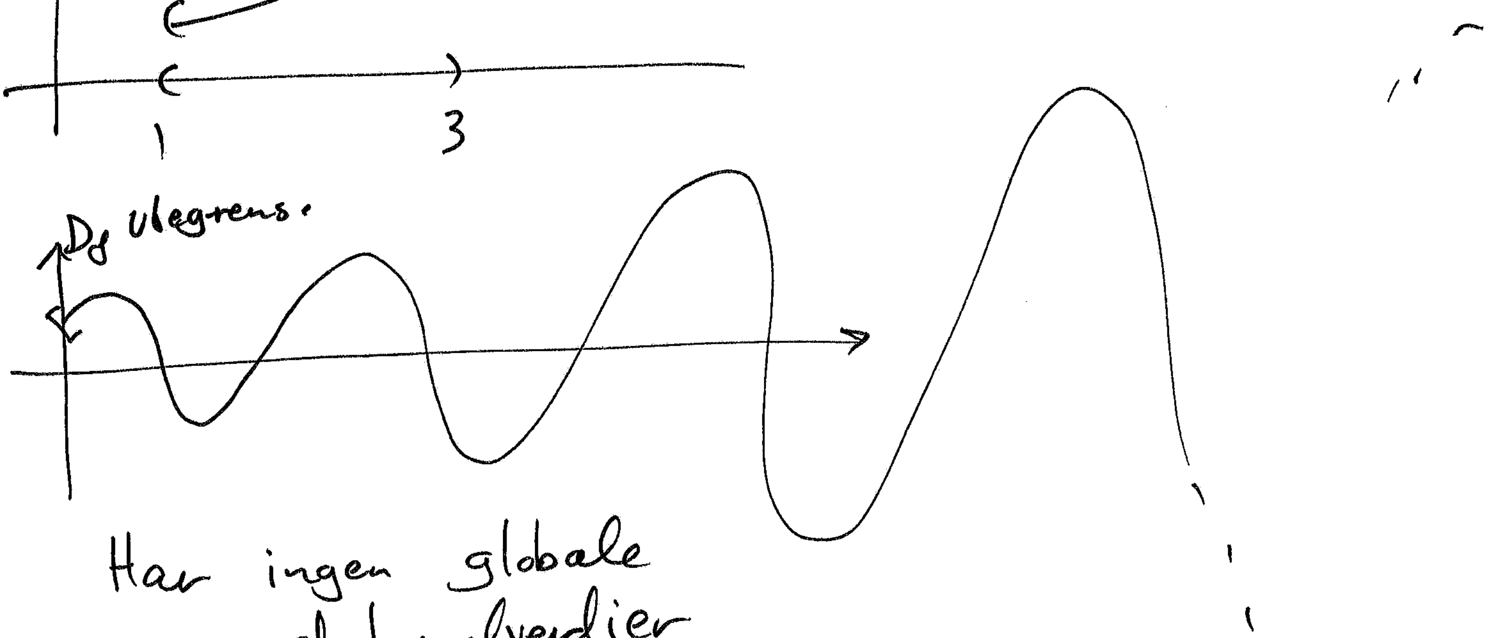


Ekstremalverdisetning

5 Hvis $f(x)$ er kontinuerlig og har en lukket og begrenset definisjonsmengde, da har $f(x)$ både globale maksimums- og minimumsverdier.



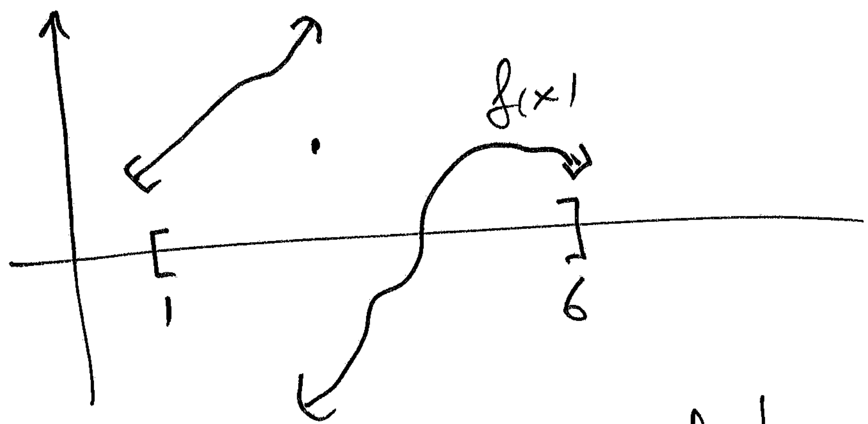




Har ingen globale ekstremalverdier.

f ikke kontinuerlig

(6)



f har ingen globale ekstremalverdier.

Hvis f(x) er kontinuerlig med begrenset og lukket definisjonsmengde har vi følgende fremgangsmåte for å finne globale maksimumspunkt.

Finn alle kritiske punkt.

Regn ut funksjonsverdien i de kritiske punktene.

De kritiske punktene med den største funksjonsverdien er de globale maksimumspunktene.

Eksempel

Finn maksimums punktene til $-x^2+3x+2$
minimums-

med definisjons mengde $[-1, 2]$

Funksjonen er kont på en lukket (begrenset) intervall så den har globale maks og min punkt.

Den deriverte er lik $-2x+3$.

Denne er lik 0 når $x = \frac{3}{2}$.

Den dobbeltderiverte er lik -2. (konkav ned)

Så vi har et toppunkt i $x = -2$.

[En alternativ prosedyre uten bruk av derivasjon:
Fullfører vi kvadratet får vi

$$-x^2+3x+2 = -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}+2 = -\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{4}$$

Dette er $\leq 17/4$ for alle x og lik $17/4$ når $x = 3/2$]

De kritiske punktene er $\underbrace{-1,\ 2}_{\text{endepunkter}}$ og $3/2$.

$f(-1) = -2$

$f(2) = 4$

$f(3/2) = 17/4 = 4.25$

maksimumspunkt $x = \underline{3/2}$ maksimumsverdi $\underline{4.25}$

minimumspunkt $x = \underline{-2}$ minimumsverdi $\underline{-2}$

(8) polynomer av grad ≤ 2 identifiseres med $\mathbb{R}^3$

$$a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$[a_2, a_1, a_0]$$

Derivasjon : $(a_2x^2 + a_1x + a_0)'$

$$0\cdot x^2 + 2a_2\cdot x + a_1$$

$$[a_2, a_1, a_0] \xmapsto{\text{derivasjo}} [0, 2a_2, a_1]$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[rr, "\text{derivasj}"', "\text{lin trans.}"] \arrow[dr, "\text{derivasj}"'] & & \mathbb{R}^3 \\
& \mathbb{R}^2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

pol. av grad 1 eller mindre

Hint til opg. 10 obl 3.