17.sep 2015

Fortolkening av matrisemultiplikasjon

1

* M $m \times n$ - matrise

$$M = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \\ \vdots \\ \vec{u}_m \end{bmatrix} \qquad M\vec{x} = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \cdot \vec{x} \\ \vdots \\ \vec{u}_m \cdot \vec{x} \end{bmatrix}$$

radvektorer

* $M = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$ søylevektorer

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$M \cdot \vec{x} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + x_n \vec{v}_n$$

lineær kombinasjon av $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$

<u>Definisjon</u>: Vektorer $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ er <u>lineært uavhengige</u> hvis $x_1\vec{v}_1 + \cdots x_n\vec{v}_n = \vec{0}$ bare hvis $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

(ellers sier vi at de er lineært avhengige)

* $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er lineært uavhengige

* $\underset{\vec{v}_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{\vec{v}_2}{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}$ og $\underset{\vec{v}_3}{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}}$ er lineært avhengige

fordi $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

(så $1 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2 + (-1)\vec{v}_3 = \vec{0}$)

La $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ være n n-vektorer
(vektorer i $\mathbb{R}^n$)

Da er vektorene lin. uavhengige hvis og bare hvis $\det([\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]) \neq 0$
n×n matrise.

(2)

$$\left[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$\vec{0}$-vektoren er én løsning.

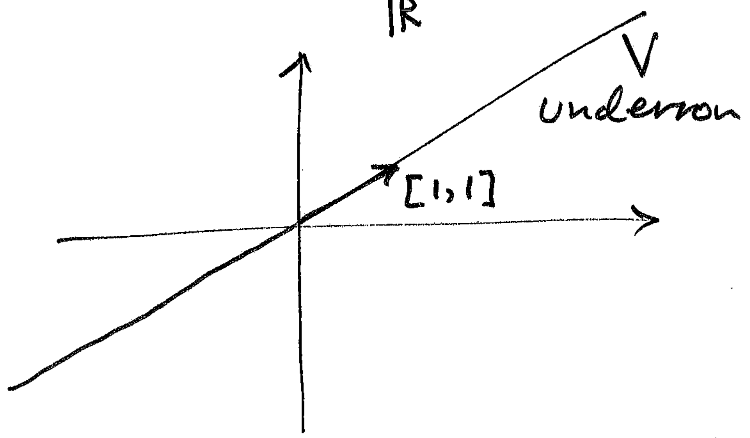
så lineært uavhengige $\Leftrightarrow$ Likningssystemet har bare én løsning $\Leftrightarrow$ $\det([\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]) \neq 0$.

Underrom av $\mathbb{R}^n$ er en delmengde av $\mathbb{R}^n$ som er lukket under addisjon og skalar multiplikasjon.

$V \subset \mathbb{R}^n$ $\qquad$ $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ (er i) så er $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$

$\vec{v}_1 \in V$ så er $k \cdot \vec{v}_1 \in V$
k skalar

(så $\vec{0} \in V$, $\vec{v} \in V$ gir $-\vec{v} = (-1)\vec{v} \in V$)



$V = \text{spann}\{[1,1]\}$

$v_1, \dots, v_n$ i $\mathbb{R}^m$

Det (lineære) spennet til $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n$

(3) $\quad$ spenn$\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$

er det minste underrommet som inneholder vektorene.

En <u>basis</u> for et underrom V av $\mathbb{R}^m$ er en samling av <u>lineært uavhengige</u> vektorer $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n$ som utspenner V

$(V = \text{spann}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\})$.

<u>Dimensjonen</u> til et vektorrom V er antall vektorer i en basis for V. (Dette er vell-definert)

Vektoren $\vec{e}_1$ og $\vec{e}_2$ er en basis for $\mathbb{R}^2$

Vektorene $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}$ er en annen basis

Vektorene $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ er enda en basis for $\mathbb{R}^2$ (Denne er også en ortonormal basis)

$$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

Lineær transformasjon $\quad T(\vec{v}+\vec{u}) = T(\vec{v}) + T(\vec{u})$

$T(k\cdot\vec{v}) = k\,T(\vec{v})$

4

$$T(V) = M \cdot V$$

$\uparrow$ $m\times n$-matrise $\quad$ standard matrisen til T.

<u>Kolonnerommet</u> til $M = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n]$ er underrommet til V utspent av $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n$.
Det består av alle vektorer som kommer fra $\mathbb{R}^m$ via transformasjonen T (med standard matrise M)

<u>Raderommet</u> til $M = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 \\ \vdots \\ \vec{u}_m \end{bmatrix}$ er underommet av $\mathbb{R}^n$ utspent av $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$.

<u>Nullrommet</u> til M er underrommet av $\mathbb{R}^n$ bestående av alle vektorer $\vec{x}$ slik at $T(\vec{x}) = M\cdot\vec{x} = \vec{0}$.

(5) $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ $\qquad 2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

- Kolonnerommet : $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}} y = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} (x+2y)$

1-dim. rom utspent av $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

- Raderommet : $[1, 2]x + \underbrace{[-2, -4]}_{-2[1,2]} \cdot y$

$$= [1, 2](x - 2y)$$

1-dim underom utspent av $[1, 2]$.

- Nullrommet : Alle $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ s.a $M\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$

$\iff 1 \cdot x + 2y = 0$

Rommet utspent av vektoren $\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}$

Dimensjonen til kolonnerommet til M kalles rangen til M $\qquad$ $\underline{\text{rang}(M)}$.

<u>Resultat</u> : dim radrommet = dim kolonnerommet = rang(M).

Dette er lik antall ledende element i matrisen vi får ved å overføre M til redusert trappeform.

$M \sim R$ redusert trappeform

⑥

M og R har samme raderom. En basis for dette rommet er radene i R.

M og R har typisk forskjellige kolonnerom.
(lineær (u)avhengighet av kolonne vektorer bevares under rad operasjonene ...)

En basis for M består av de kolonne vektorene i M som svarer til en kolonne med et ledende element i R.

Eksempel $M = [\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4]$ 3x4 matrise

På redusert trappeform: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

rang(M) = 2

Rekkerommet er spann([0,1,0,2] og [0,0,1,0])

Kolonnerommet er spann$(\vec{V}_2, \vec{V}_3)$

Nullrommet $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ s.a

$$x_2 + 2x_4 = 0$$
$$x_3 = 0$$

$$\text{spann}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

(7) Likeningssystem og lineære transformasjoner

$$M\vec{x} = \vec{b}$$ M $m \times n$-matrise

M gir en lineær transformasjon $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Løsningen til likningssystemet $M\vec{x} = \vec{b}$ er alle vektorer $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$ som sendes til vektoren $\vec{b}$ i $\mathbb{R}^m$.

Ingen løsning: $\vec{b}$ er ikkje i kolonnerommet til M.

Løsning: $\vec{b}$ er i kolonnerommet til M.

én løsning hvis $Null(M)$ er 0-rommet (0-dimensjonalt).

(Hvis $\vec{x}, \vec{y}$ er løsninger:
$$M\vec{x} = \vec{b}$$
$$M\vec{y} = \vec{b}$$
$$M(\vec{x}-\vec{y}) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$$
)

så $\vec{x}-\vec{y}$ er i $Null(M)$.

Løsningene til $M\vec{x} = \vec{b}$ består av

én løsning x_0 pluss vektorer i nullrommet til M.

Antall parametrer som behøves for å parametrisere løsningene er lik dimensjonen til $Null(M)$.

8

Minste kvadraters metode.

$$y = ax + b$$

n punkt $(x_1, y_1) \ \dots \ (x_n, y_n)$

Likningssystem
$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

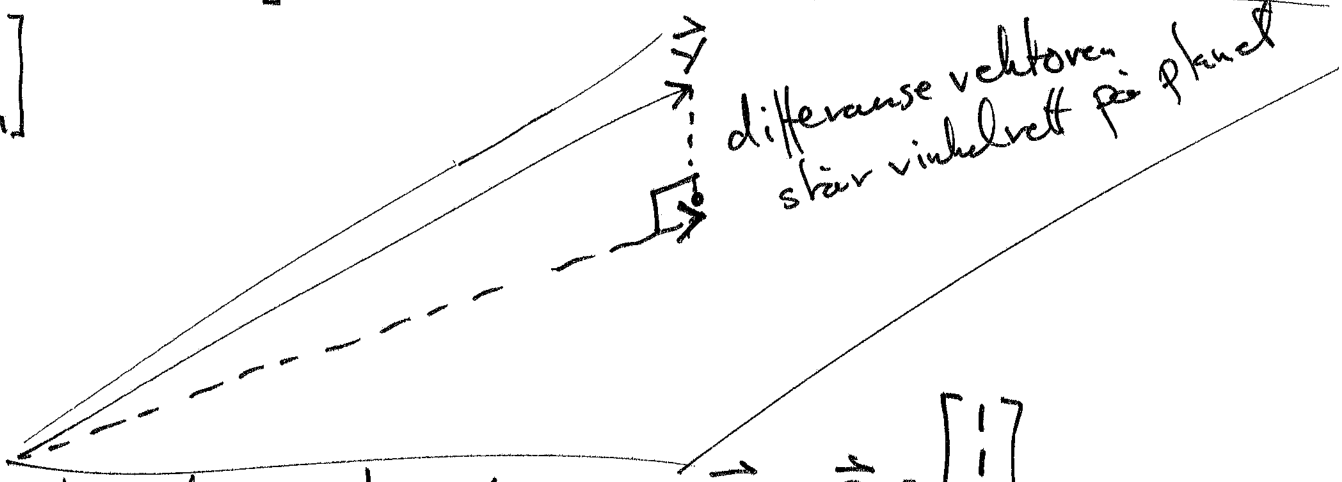
Likningssystemet har typisk ingen løsning.
Vi ønsker å finne $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ nærmest mulig en løsning i følgende forstand:

$$(ax_1 + b - y_1)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2$$

skal være minst mulig.

$$M = [\vec{x}, \vec{c}] = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \qquad M \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \vec{y}$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$



planet utspent av $\vec{x}, \ \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

9

(se nedenfor for forklaring)

$$X^T \left(\vec{y} - M\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \vec{0}$$

$$c^T \left(\vec{y} - M\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \vec{0}$$

$$\left(\begin{bmatrix} X^T \\ c^T \end{bmatrix} = [X, c]^T = M^T \right)$$

Så $\quad \underline{M^T} \left(\vec{y} - M\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \vec{0}$

$$\boxed{\underline{M^T M} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = M^T \vec{y}}$$

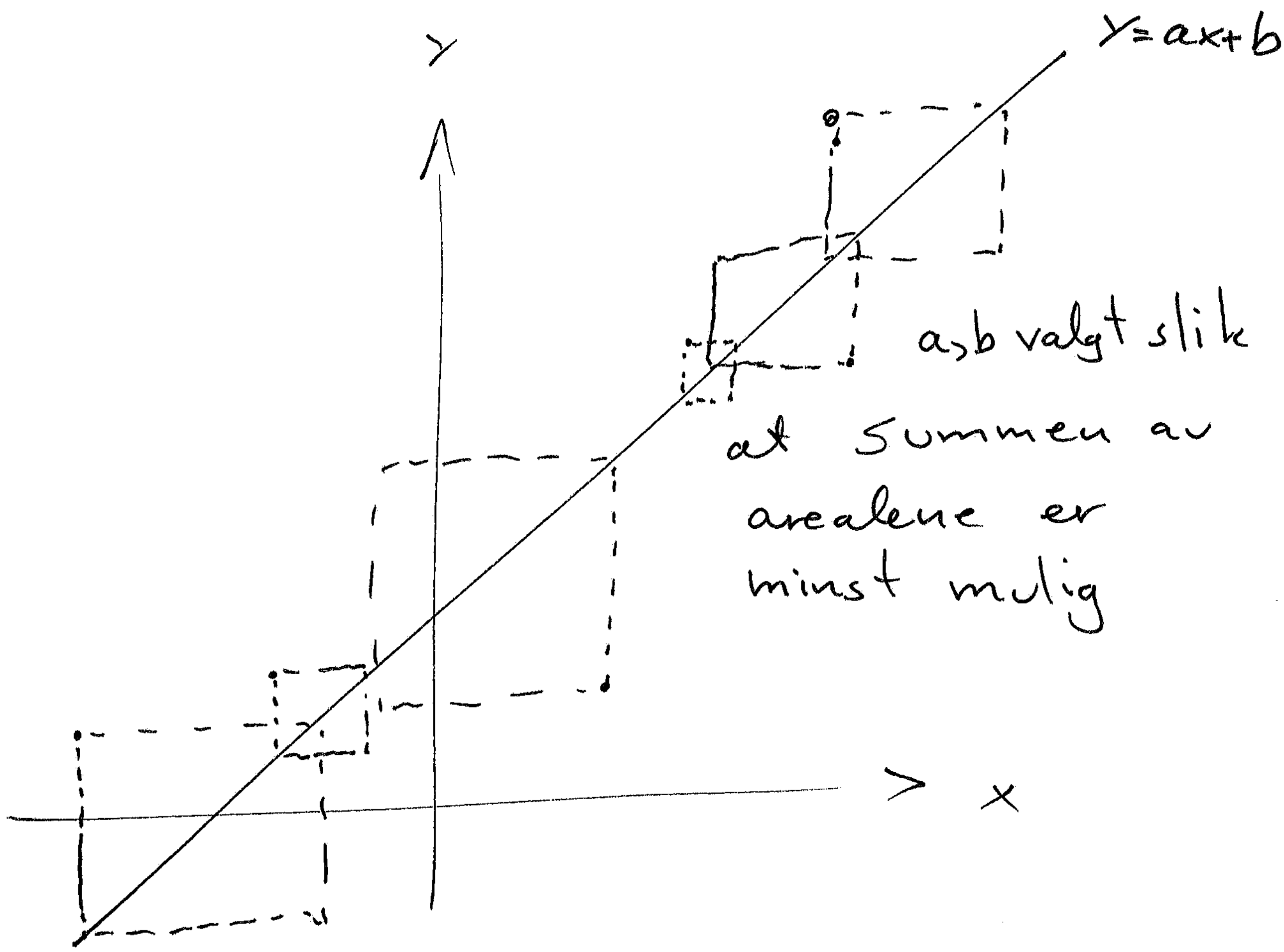
↑

typisk en inverterbar 2×2-matrise

Avstanden mellom $\vec{y}$ og $M\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ er

$$\sqrt{(ax_1 + b - y_1)^2 + \cdots + (ax_n + b - y_n)^2}.$$

Den er minst når $\vec{y} - M\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ står vinkelrett på planet utspent av $\vec{x}$ og $\vec{c}$. Dette leder til kravet at ~~skalarproduktet~~ mellom $\vec{y} - M\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ og basisvektorene $\vec{x}$ og $\vec{c}$ må være 0 når avstanden mellom y og $M\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ er kortest mulig.



a,b valgt slik at summen av arealene er minst mulig

Samme teknikk kan benyttes for å tilpasse en annen funksjon som $ax^2+b\cdot x+c$ til et datasett (parametrene må forekomme lineært)

Mer om anvendelser etc finner dere for eksempel på wikipedia (engelsk versjon) søk "Linear regression".