7. sep 2015

Determinanter av 2×2 matriser

① Determinanten til $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ er en skalar definert som $\det(A) = |A| = ad - bc$

Eksempel: $\det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = 2(-3) - 5 \cdot 1 = -11$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{array}{cc} + & - \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

En 2×2 matrise A er inverterbar hvis og bare hvis ($\Leftrightarrow$) $\det A \neq 0$

$\Leftarrow$ Hvis $ad - bc \neq 0$, da er $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Hvis $\det A = 0$, $ad - bc = 0$, da er søylevektoren $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \vec{v}_1$ og $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \vec{v}_2$ parallelle.

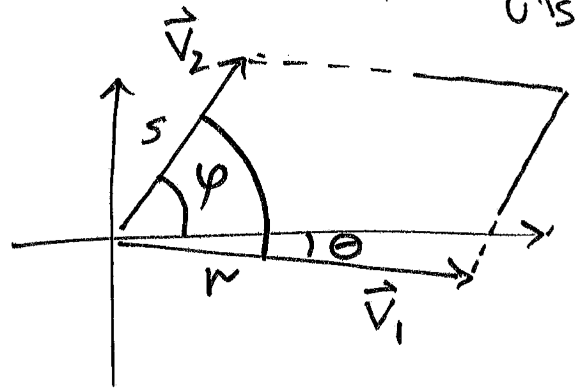
Så A er ikke inverterbar: (forklaring følger)

$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [\vec{v}_1, \vec{v}_2]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2$ er da også parallell til $\vec{v}_1$.

$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \vec{b}$
* har da ingen løsning hvis $\vec{b}$ ikkje er parallell til $\vec{v}_1$
* har uendlig mange løsninger hvis $\vec{b}$ er parallell til $\vec{v}_1$.

Geometrisk fortolkning av determinanten

(2) $\left|\det[\vec{V}_1, \vec{V}_2]\right|$ = arealet av parallellogrammet utspent av $\vec{V}_1$ og $\vec{V}_2$



$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} r\cdot\cos\theta \\ r\cdot\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} s\cos\varphi \\ s\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} r\cos\theta & s\cos\varphi \\ r\sin\theta & s\sin\varphi \end{bmatrix} = r\cdot s\cos\theta\sin\varphi - r\cdot s\sin\theta\cos\varphi$$

$$= r\cdot s\,(\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi)$$

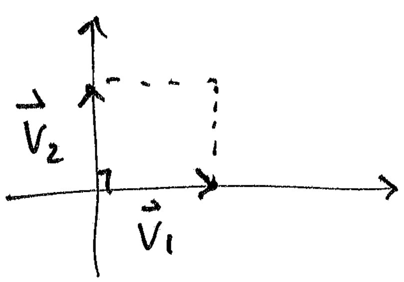
$$= r\cdot s\,(\cos(-\theta)\sin\varphi + \sin(-\theta)\cdot\cos\varphi)$$

$$= r\cdot s\,\sin(\varphi-\theta)$$

Dette viser resultatet.

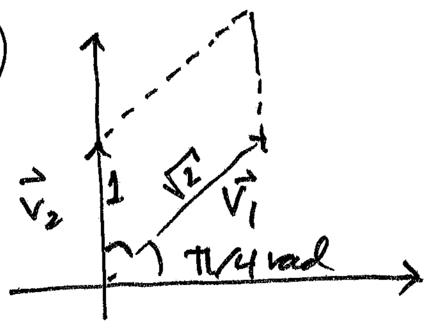
Fortegnet til $\det[\vec{V}_1\,\vec{V}_2]$ er positivt hvis retningen fra $\vec{V}_1$ til $\vec{V}_2$ (minste vinkel) er positiv.

Eksempel 1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \det A = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = \underline{\underline{1}}$



2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

③



$\det A = +1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{1}$

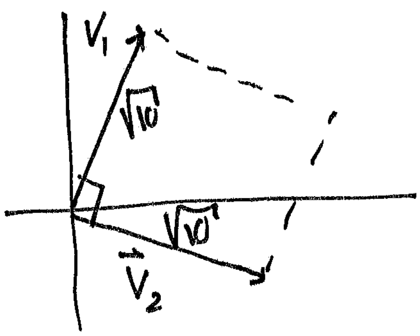
$\det(A) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = \underline{1}$

3)

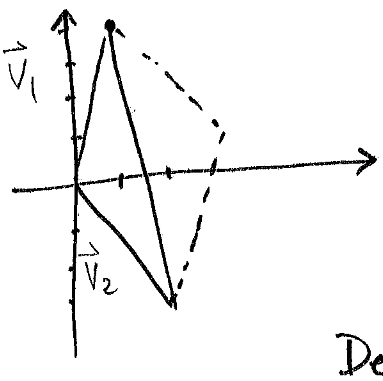
$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = 1(-1) - 3 \cdot 3 = -10$

arealet er 10

retningen fra $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ til $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ er negativ.



4) Finn arealet til trekanten med hjørner $(0,0)$, $(1,4)$ og $(2,-3)$.



Arealet er lik halvparten av arealet til parallellogrammet utspent av $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Det er lik $\frac{1}{2}\left|\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\right|$

$\vec{V}_1 = \overrightarrow{(0,0)\ (1,4)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left| 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 4 \right|$

$V_2 = \overrightarrow{(0,0)(2,-3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left| -3 - 8 \right| = \frac{11}{2} = 5.5$

④ Noen egenskaper til determinanter

- Bytte av to rader (to søyler) skifter fortegnet til determinanten

$$\left(\det\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = c\cdot b - da = -(ad-bc) = -\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right)$$

- Determinanten er lineær i hver rad og søyle

$$\left(\det\begin{bmatrix} k\cdot a & kb \\ c & d \end{bmatrix} = k\cdot a\cdot d - k\cdot b\cdot c = k(ad-bc) = k\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right.$$

$$\det\begin{bmatrix} a_1+a_2, & b_1+b_2 \\ c & d \end{bmatrix} = (a_1+a_2)\cdot d - (b_1+b_2)\cdot c$$

$$= (a_1\cdot d - b_1\cdot c) + (a_2\cdot d - b_2\cdot c) =$$

$$\left. \det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c & d \end{bmatrix} \right)$$

- $\det(1_2) = 1$ $\qquad (\det(1_n) = 1)$

Determinanter av $n\times n$-matriser.

(Det. er ikke def for $m\times n$ matriser med $m \neq n$.)

Det finnes en entydig funksjon fra $n\times n$-matriser til $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ som har de tre egenskapene ovenfor.

Denne funksjonen er determinanten.

(se gjerne notatet som er lagt ut under uke 35 på hjemmesiden.)

5

Noen definisjoner

$$A = \begin{array}{c c} & \phantom{a_{11} \cdots} j \\ i & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Determinanten til $(n-1)\times(n-1)$-matrisen hvor rad i og kolonne j er fjernet kalles <u>i,j minor til</u> A.

<u>i,j kofaktoren</u> til A er $(-1)^{i+j} \cdot$ i,j-minor til A.

$\left((-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & i+j \text{ jevn tall} \\ (-1) & i+j \text{ oddetall} \end{cases} \right)$

$$\begin{bmatrix} + & - & \cdot & \cdot \\ - & + & - & \\ + & - & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

minor i posisjon i,j : M_{ij}

kofaktor : C_{ij}.

<u>Kofaktormatrisen</u> C har kofaktoren C_{ij} i posisjon i,j.

Den <u>adjungerte</u> til A er den transponerte av kofaktor matrisen

$$\operatorname{adj} A = C^T$$

$$(\operatorname{adj} A)_{ij} = C_{ji} = (-1)^{i+j} M_{ji}.$$

Rekursiv beskrivelse av determinanten

(6) (til n×n-matriser fra determinanten av (n−1)×(n−1)-matriser)

$$\det(A) = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + \cdots \quad a_{1n} C_{1n}$$

Alternativt kan vi benytte en annen rad enn den første, eller en kolonne.

Eksempel 2×2-matriser

$(\det [a] = a)$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} \qquad \text{Adj} A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Legg merke til $\underline{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj} A}$

Dette er også gyldig for n×n-matriser.

Eksempel

7 $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

odd possisjon

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + (-1) 4 \det \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ (-2) \det \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \cdot (1 - (-15)) - 4(-2 - 0) - 2(-6 - 0)$$

$$= 16 + 8 + 12 = \underline{36}$$

Determinant og radoperasjoner

* $A \sim B$ ved å gange en kolonne med k

$$k \cdot \det A = \det B$$

* $A \sim B$ ved å legge til en (skalar ganget en) rad til en annen rad

$$\det A = \det B$$

$$\left(\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 + k \cdot V_1 \\ \vdots \end{bmatrix}, \right.$$

lineær. $\qquad =0$

$$\det \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 + k \cdot V_1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} V_1 \\ kV_1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\left. \text{fordi } k \det \begin{bmatrix} V_1 \\ V_1 \\ \vdots \end{bmatrix} = - k \det \begin{bmatrix} V_1 \\ V_1 \\ \vdots \end{bmatrix}, \text{ så } k \det \begin{bmatrix} V_1 \\ V_1 \\ \vdots \end{bmatrix} = 0 \right)$$

snur fortegn ved radbytte

$A \sim B$ ved å bytte to rader

(8) $\det A = -\det B$.

$A \sim R$ redusert trappeform

$$\det A = \frac{\det(R) \cdot (-1)^{\text{antall radbytter}}}{\text{Produktet av all skalarer vi har gangat rader med}} .$$

Hvis T er en triangulær matrise,

$$T = \begin{bmatrix} a_1 & & * \\ & a_2 & \\ 0 & \ddots & a_n \end{bmatrix} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{eller } T^{\text{transp.}} \\ \text{er slik}\end{array}\right)$$

da er $\det(T) =$ produktet av diagonal-elementene

$= a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$.

(dette er klart fra den rekursive beskrivelsen av determinanter.)

Eksempel

9

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 10 & -5 \\ 4 & 15 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -3 \\ -4 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -15 \\ 0 & -1 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix} = B$$

$$\text{så } \det A = (-1)^{\overset{\text{bytte av to rader}}{1}} \cdot \det B = -\left(1 \cdot (-1) \cdot (-15)\right)$$

$$= \underline{-15}$$