31.aug 2015 Matrisemultiplikasjon og inversmatriser

(1) Vi kan multiplisere $m \times k$ matrise med en $k \times n$ matrise. Resultatet er en $m \times n$ matrise

skalarprodukt

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \dots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i \cdot u_j \end{bmatrix}$$

elementet i posisjon i,j.

$A = [1, 2]$ og $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$A \cdot B = [1,2] \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = [1 \cdot (-3) + 2 \cdot 4] = [5]$ 1×1-matrise.

$B \cdot A = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} [1, 2] = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

Transponering $A = [a_{ij}]_{i,j}$

Transponerte $A^T = [a_{ji}]_{i,j}$

elementet i posisjon i,j i A^T er a_{ji}.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ 3×2 matrise

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ 2×3 matrise.

Resultat : $(A\cdot B)^T = B^T A^T$

Vi forklarer hvorfor det er slik:

$$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} u_1 \dots u_m \end{bmatrix}$$

2

$$\underbrace{(A\cdot B)^T_{i,j}}_{\text{elementet i posisjon } i,j.} = \underline{v_j \cdot u_i}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} v_1, \dots v_n \end{bmatrix} \qquad B^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \dots v_n \end{bmatrix}$$

$$(B^T A^T)_{i,j} = \underline{u_i \cdot v_j}$$

Viser at $\underline{(A\cdot B)^T = B^T A^T}$.

Matriser med like mange rader som kolonner kalles <u>kvadratiske</u> matriser, eller $n \times n$ matriser.

Elementene i posisjon i,i kalles diagonal-elementer.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & a_{22} \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonalelementer.

identitetsmatriser

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & 1 \end{bmatrix}}_{n\times n \text{ matrise}} = I_n$$

③ $A \cdot I_n = A$ $\qquad I_m \cdot A = A$

En matrise A er symmetrisk hvis

$A^T = A$ (A må da være symmetrisk)

A er antisymmetrisk hvis $A^T = -A$.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ symmetrisk

$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ antisymmetrisk

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ ikkje (anti) symmetriske.

En kvadratisk matrise er <u>øvre triangulær</u> hvis alle elementer ulik null er på diagonalen eller over diagonalen.

$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ øvre triangulær , $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ øvre triangulær

$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ekte øvre triangulær

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 12 & 3 & 0 \\ -9 & 5 & -7 \end{bmatrix}$ nedre triangulær

4

Inversmatriser

En kvadratisk matrise A er inverterbar hvis det finnes en matrise B slik at:

$$AB = 1_n = BA$$

Hvis B finnes er den entydig bestemt av A. B skrives som $\underline{A^{-1}}$.

Ikkje alle matriser ulik 0 har en inversmatrise.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Så A har ingen inversmatrise (A er ikkje invertibel) (Anta A har en invers B:

$$\underbrace{B \cdot \underbrace{B \cdot A}_{1} \cdot A}_{B \cdot A} = B \cdot B \cdot 0$$

$$B \cdot A = 0$$

$$1 = 0 \quad \text{ikkje mulig!}$$
)

4,5

Anta: $AB = 1 = BA$

$AC = 1 = CA$

Da er $B\underbrace{AC}_{1} = B$

$\| \qquad\qquad \|$

og $\underbrace{BA}_{1}C = C$

A^{-1} er entydig!!

Her viser vi at inversmatrisen til A er unik (entydig) hvis den finnes. Vi anta at både B og C er inversmatriser til A og kommer frem til at $B = C$.

Inversmatriser til 2×2 matriser

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

vinkelrett på [c, d]

5

Disse vektorene er bestemt (opp til skalering)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

vinkelrett på [a, b]

$$= \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$$

Vi har her sikret oss at disse elementene blir 0.

Hvis $ad-bc \neq 0$ så er

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1_2$$

Hvis $ad-bc = 0$ så er A ikke inverterbar.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2\cdot 8 - 3\cdot 5} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Løs likningssystemet

$$2x + 3y = a$$
$$5x + 8y = b$$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

koeffisient-
matrise

Ganger med inversmatrisen fra venstre:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1_2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\underline{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8a - 3b \\ -5a + 2b \end{bmatrix}}$$

Noen egenskaper til inversmatriser

* $(A^{-1})^{-1} = A$
* Hvis A og B er inverterbar $n \times n$-matriser,
  da er $A \cdot B$ også inverterbar.

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

(snur rekkefølgen!)

$$\Big(\; B^{-1} \cdot \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{1_n} \cdot B = B^{-1} \cdot B = 1_n$$

$$A \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{1_n} \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = 1_n \; \Big)$$

⑦ En algoritme for å (forsøke) finne inversmatriser:

kvadratisk $(n \times n)$ matrise A

$$\left[A \mid 1_n \right] \qquad n \times 2n \text{ matrise.}$$

Utfører radoperasjoner til A overføres til redusert trappeform.

Hvis resultatet er $\left[1_n \mid B \right]$, da

er B inversmatrisen til A.

Hvis ikkje er A ikkje inverterbar (det vil da være minst én 0-rad i venstre kvadrat).

Sjekker algoritmen med

8. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] -\frac{c}{a} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & \underbrace{-\frac{bc}{a}+d}_{\frac{ad-bc}{a}} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right]$$

Ganger rad 2 med $\frac{a}{ad-bc}$

$\underline{ad-bc \neq 0}$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right] -b$$

(Vi skriver $1 = \frac{ad-bc}{ad-bc}$ ...)

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1+\frac{bc}{ad-bc} & \frac{-ab}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} a & 0 & \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad\overbrace{-bc+bc}^{0} & -ab \\ -c & a \end{bmatrix} \\ 0 & 1 & \end{array}\right] \cdot \frac{1}{a}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \underbrace{\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \\ 0 & 1 & \end{array}\right]$$

Vi observerer at algoritmen fungerer for 2×2-matriser.