

# Lineær algebra

H. Fausk

23.08.2015

Fjerde utkast

Lineære likningsystem lar seg løse ved bruk av de elementære regneartene. I prinsippet er løsning av lineære likningsystem enkelt, men det blir fort veldig mange regneoperasjoner som må utføres når antall variabler økes. Vi går gjennom noen velletablerte fremgangsmåter for å forstå og å løse slike likningssystemer på en mest mulig oversiktlig måte. Disse metodene og begrepene rundt dem viser seg nyttig i andre sammenhenger enn bare for å løse likninger. Det mest fundamentale begrepet er lineære avbildninger mellom lineære rom. I denne sammenheng vil et system av lineære uttrykk svare til en lineær avbildning mellom to vektorrom med gitt basiser. Likningsystemet svarer til spørsmålet: hvilke vektorer sendes til en gitt vektor i målrommet?

Vi kan godt ha uendelig mange variabler. Viktige eksempler på det er vektorrom bestående av ulike klasser av funksjoner. Disse rommene er typisk ikke endeligdimensjonale og vi må også ta hensyn til at lineære avbildninger skal være kontinuerlige.

## 1 En lineær likning

Et lineært uttrykk er en endelig sum hvor hvert av leddene er en variabel ganget med en skalar<sup>1</sup>. For eksempel er  $3x - 5y$  og  $x - 2y/3 + \sqrt{2}z$  lineære uttrykk. En **lineær likning** er på formen et lineært uttrykk satt lik en skalar. For eksempel er  $2x - 3y = 4$  en lineær likning i de to variablene  $x$  og  $y$ . Mens  $x + y + z = 0$  er en lineær likning i de tre variablene  $x$ ,  $y$  og  $z$ . Hvis vi har mange variabler er det hensiktsmessig å bare bruke ett symbol for listen av variabler, og heller nummerere de ulike variablene i listen. For eksempel  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . En lineær likning i disse variablene er

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

Her er  $a_1, \dots, a_n$  **koeffisientene** til variablene og  $b$  er verdien som vi krever uttrykket skal være lik. Legg merke til at  $x$  og  $a$  forekommer på samme måte, men  $a$  og  $x$  spiller forskjellige roller. Vi tenker på koeffisientene  $a$  som gitte størrelser i hver likning og  $x$  som variablene som vi ønsker å finne mulige verdier for (gitt en verdi av  $b$ ). Her er summen skrevet opp ved bruk av summenotasjonen.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \sum_{i=1}^n a_ix_i$$

Her har vi oppgitt hva ledd nummer  $i$  skal være og hvilke indekser  $i$  vi summerer over.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>I andre sammenhenger er det vanlig å la et lineært uttrykk være et polynom av grad 1 eller lavere. Det vil si at vi også tillater å legge til en skalar til et lineært uttrykk.

<sup>2</sup>Sigma  $\sum$ , er den greske bokstaven som svarer til vår (latinske) S. Brukt i summenotasjonen kalles den også summetegnet.

**Løsningen** til en lineær likning i en variabel er alle verdier av variabelen som gjør påstanden i likningen sann. Løsningen kan enten bestå av akkurat ett tall, alle tallene eller det kan også hende at det finnes ingen tall som gjør likningen sann. I det sistnevnte tilfellet sier vi at løsningen er tom. Eksempler som realiserer disse tre tilfellene er

$$2x = 5 \quad 0 \cdot x = 0 \quad 0 \cdot x = 1$$

Løsningen til en lineær likning med to variabler er typisk en linje, men den kan også være hele planet eller tom.

Løsningen til en lineær likning med tre variabler er typisk et plan i rommet. Også her kan løsningen være hele rommet eller tom. Vi gir litt mer detaljer. La

$$ax + by + cz = e$$

være en lineær likning i de tre variablene  $x, y$  og  $z$ . Løsningene er hele rommet hvis alle fire koeffisientene er lik 0. Hvis bare  $e$  er forskjellig fra 0, er det ingen løsninger. Hvis derimot ikke alle  $a, b$  og  $c$  er lik null, da er løsningen planet som står vinkelrett på vektoren  $[a, b, c]$ , og som inneholder et punkt som svarer til en løsning til likningen. Anta  $ax_0 + by_0 + cz_0 = e$  for et punkt  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ . Da er  $P = (x, y, z)$  en løsning til likningen bare hvis skalarproduktet mellom vektoren  $[a, b, c]$  og vektoren fra  $P_0$  til  $P$  er lik 0. Så løsningene er alle punkt  $P = (x, y, z)$  slik at vektoren fra  $P_0$  til  $P$  står vinkelrett på  $[a, b, c]$ .

**Oppgave 1** *Forklar hvordan alle linjer i  $xy$ -planet (også vertikale linjer) er løsningen til en passende lineær likning i variablene  $x$  og  $y$ .*

**Oppgave 2** *Forklar hvorfor alle plan som inneholder origo er løsning til en likning*

$$ax + by + cz = 0$$

*for passende koeffisienter  $a, b$  og  $c$ , ikke alle lik 0.*

## 2 Lineære likningssystem

Et **lineært likningssystem** består av en eller flere lineær likning i et sett av variabler. For eksempel er

$$x + y = 0 \quad x - y = 2$$

et likningssystem bestående av to likninger i to variabler. Et annet eksempel er likningssystemet

$$x - 2z/5 = 3/4 \quad -y + 12z = 13$$

Her tenker vi da på begge likningene som likninger i de felles variablene  $x, y$  og  $z$ . Utelatte forekomster av en variabel tenker vi på som 0 ganger variabelen. For eksempel er første likning lik  $1 \cdot x + 0 \cdot y + (-2/5) \cdot z = 3/4$ .

En løsning til et likningssystem er verdier til variablene som gjør påstanden i *alle* likningene sanne.

Det første likningssystemet ovenfor har akkurat en løsning. Vi kan illustrere løsningen geometrisk som punktet hvor de to linjene beskrevet av hver av likningene møtes (bare der er begge likningene oppfylt). I dette eksempelet er det punktet  $(x, y) = (1, -1)$ .

De andre likningssystemet ovenfor uendelig mange løsninger. Løsningene er linjen hvor de to planene beskrevet av likningene møtes.

**Oppgave 1** Sjekk at løsningene til det andre likningssystemet består av alle punktene som ligger på er linjen som er parallell til vektoren  $[2/5, 12, 1]$  og som går gjennom punktet  $(23/20, -1, 1)$ .

Har vi to likninger med tre variabler, og løsningen til hver av likningene er plan som ikke er parallelle, så er løsningen linjen hvor de to planene møtes. Legger vi til en tredje likning vil løsningene være punktet hvor linjen snitter det tredje planet (hvis da linjen ikke ligger i det siste planet eller aldrig møter det).

**Oppgave 3** Her er en fremgangsmåte for å finne løsningen til et likningsystem med tre ukjent og to likninger. Vi forutsetter at de to likningene bestemmer to ikke-parallelle plan.

Bestem normalvektorene til løsningsplanene til hver av likningene. (Dette er vektoren av koeffisienter.)

Finn deretter en vektor  $V$  som står vinkelrett på de to normalvektorene. (En slik vektor er kryss-produktet av de to normalvektorene.)

Finn et punkt  $P$  som ligger i begge planene. Dette kan reduseres til å velge en verdi for ene variabelen og så løse systemet med to likninger og de to gjennstående variablene. Dette må gjøres på en måte som garanterer at vi får en løsning.

Vi har nå en parametrisering av linjen. Den består av alle punkt som ligger på linjen gjennom punktet  $P$  og som er parallell til vektoren  $V$ .

Et likningssystem som har minst en løsning kalles for **konsistent**. Løsningsmengden til et konsistent likningssystem består enten av én løsning (et punkt) eller uendelig mange løsninger (linje, plan, rom, eller høyere dimensjonale varianter). Den kan ikke bestå av to punkt slik som for eksempel løsningen til en kvadratisk likning som  $x^2 = 4$ . Likningssystemet kalles **inkonsistent** hvis det ikke har noen løsninger.

Likningsystem med mange linkninger kan vi skrive opp som

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$$

hvor  $i = 1, \dots, m$  indekserer de  $m$  likningene. Her benytter vi en dobbel indeks på koeffisientene. Den første indeksen sier hvilke likning den tilhører og den andre indeksen hvilke variabel den er koeffisienten til.

Det er vanlig å skrive opp alle disse koeffisientene i en rektangulær **matrise**<sup>3</sup>. Denne matrisen kalles gjerne koeffisientmatrisen.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

---

<sup>3</sup>Sjekk etymologien for ordet matrise og les om historien til bruken av matriser.

Matrisen har  $m$  (horisontale) rader og  $n$  (vertikale) kolonner. Vi sier at **dimensjonen** til matrisen er  $m \times n$ , eller at det er en  $m \times n$ -matrise. Matrisen består av  $m \cdot n$  **elementer**  $a_{i,j}$ . To matriser **A** og **B** er like hvis de har samme dimensjon og alle elementene  $a_{i,j}$  og  $b_{i,j}$  som er i samme posisjon er like.

En  $1 \times n$ -matrise kalles en **radvektor** av lengde  $n$ . Den er en horisontall listing av  $n$  elementer fra venstre til høyre. En  $m \times 1$ -matrise kalles en **kolonnevektor** (**søylevektor**). Den er en vertikal listing av  $m$  elementer ovenfra og ned. I en  $m \times n$ -matrise er det  $m$  rader og  $n$  kolonner (også kaldt søyler). På engelsk kalles de henholdsvis "row and column". Matrisen av koeffisienter hjelper oss å holde orden på koeffisientene og den lar oss slippe å skrive opp variablene gjentatte ganger. Posisjonen til et element sier hvilken likning og hvilken variabel det tilhører. Elementet i posisjon  $i, j$  tilhører likning nummer  $i$  og variabel nummer  $j$ . For å beskrive et likningssystem er det og nødvendig å ta med skalarene som de lineære uttrykkene skal være lik. Vi samler disse skalarene i en kolonnevektor. Den **utvida matrisen** (også kalt totalmatrisen eller den hele matrisen) til likningssystemet er koeffisientmatrisen sammen med denne kolonnevektoren. Det kan være til hjelpe å lage et skille mellom koeffisientene og denne vektoren, for eksempel ved en vertikal linje slik som her.

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right]$$

**Oppgave 2** *Skriv opp koeffisient matrisen og den utvida matrisen til de to likningssystemene i starten av denne seksjonen.*

### 3 Radoperasjoner

Skalere vi en likning med en skalar ulik 0 endrer vi ikke løsningsmengden til likningen. Bytter om på rekkefølgen av likningene eller legger en likning til en annen likning i et likningssystem så endrer vi heller ikke på løsningsmengden til likningssystemet.

**Oppgave 3** *Vis påstandene ovenfor.*

De følgende tre operasjonene på matriser kalles **radoperasjoner**.

1. Bytte om to rader
2. Gange en rad med en skalar ulik 0
3. Legge en rad, ganget med en skalar, til en annen rad

Løsningsmengden til en utvida matrise (tilordna et likningssystem) forblir uendra om vi utfører radoperasjoner på denne matrisen. To matriser kalles **radekvivalente matriser** (eller bare ekvivalente) hvis vi kan starte med den ene matrisen og utføre radoperasjoner til vi får den andre matrisen. Symbolet tilde  $\sim$  brukes for å angi at to matriser er radekvivalente.

**Oppgave 4** *Vis at hvis vi kan utføre radoperasjoner på en matrise  $\mathbf{A}$  og få en matrise  $\mathbf{B}$ , da kan vi utføre radoperasjoner på matrisen  $\mathbf{B}$  slik at vi får matrisen  $\mathbf{A}$ .*

La oss starte med et likningssystem som er så enkelt at det faktisk bare oppgir hva løsningen skal være. Ved å utføre radoperasjoner kan vi da lage et likningssystem med de samme løsningene, men hvor det ikke er opplagt ved å se på likningene. For eksempel har følgende to likningssystem

$$\begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & 2 \\ z & = & 3 \end{array}$$

og

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y + 5z & = & 25 \\ 2x + 9y - 10z & = & -8 \\ -6y + 5z & = & 3 \end{array}$$

samme løsning. Det siste likningssystemet fremkommer fra det første ved bruk av radoperasjoner.

En taktikk for å løse et likningssystem, hvor de ulike variablene er “mikset sammen” og forekommer i flere likninger, er å benytte radoperasjoner til å “nøste opp likningene” til vi får en beskrivelse hvor vi lett kan lese av løsningene.

Vi viser detaljert hvordan dette kan gjøres med eksempelet ovenfor. Den utvida koeffisientmatrisen til likningssystemet er

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 25 \\ 2 & 9 & -10 & -8 \\ 0 & -6 & 5 & 3 \end{array} \right]$$

Legger vi til  $-1$  ganget med første rad til rad 2 får vi

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 25 \\ 0 & 6 & -15 & -33 \\ 0 & -6 & 5 & 3 \end{array} \right]$$

Tar vi nå rad 2 og legger til rad 3 får vi

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 25 \\ 0 & 6 & -15 & -33 \\ 0 & 0 & -10 & -30 \end{array} \right]$$

Dette er eksempel på en matrise på **trappeform**. Vi kan nå løse likningssystemet som følger: Den tredje raden gir at  $z = 3$ . Den andre raden, hvor vi setter inn verdien for  $z$ , gir at  $6y = -33 + 15z = -33 + 45 = 12$ . Derfor er  $y = 2$ . Den første raden gir  $2x = 25 - 3y - 5z = 25 - 6 - 15 = 4$ . Derfor er  $x = 2$ .

Vi kan også utføre flere radoperasjoner slik at vi får den utvida matrisen på en enda enklere form. Vi kan da lese av løsningene mer direkte. Ganger vi rad 3 med  $-1/10$  og rad to med  $1/3$  får vi

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 25 \\ 0 & 2 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Vi legger nå til 5 kopier av rad 3 til rad 2. Til rad 1 legger vi til rad 3 ganget med  $-5$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Vi ganger nå rad 2 med  $1/2$  og deretter legger vi til  $-3$  ganget med rad 2 til rad 1

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Til sist ganger vi rad 1 med  $1/2$  og vi får den opprinnelige matrisen

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

som angir verdiene til de tre variablene. Dette er eksempel på en matrise på **redusert trappeform**.

Her er et lignende eksempel hvor det er uendelig mange løsninger (en linje). La de tre variablene være  $x$ ,  $y$  og  $z$  (i denne rekkefølgen) og la likningsystemet være gitt ved følgende utvida matrise

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Likningsystemet har uendelig mange løsninger. For hver verdi av  $z$  så får vi akkurat en verdi for  $x$  og for  $y$ . Vi kan parametrisere løsningene (løsningsmengden) ved variabelen  $z$  som følger. Løsningene består av alle punkt  $(x, y, z)$  slik at  $x = -3 + 4z$ ,  $y = 1 - 2z$  for alle mulige verdier av variablene  $z$ . Vi kunne, i dette tilfellet, alternativt ha parametrisert ved en av de andre variablene, eller ved en annen parameter som ikke er en av variablene.

**Oppgave 5** a) *Parametriser løsningen til likningen ovenfor ved hjelp av variabelen  $x$*

b) *Parametriser løsningen til likningen ovenfor ved hjelp av variabelen  $y$*

c) *Vis at*

$$(1 - 4a, 2a - 1, 1 - a)$$

*for alle  $a$  er en parametrisering av alle løsningene til likningen.*

**Oppgave 6** *Lag en likning i to variabler slik at løsningsmengden kan parametriseres ved hjelp av  $x$  men ikke ved hjelp av variabelen  $y$ .*

Her var likningene “løst opp” slik at det var enkelt å lese av løsningene. Følgende likningssystem

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

er en mer “sammenblandet” versjon hvor vi har benyttet radoperasjoner. Det nye likningssystemet har derfor samme løsningsmengde som tidligere, men det er ikke lett å se fra likningssystemet.

Vi utfører radoperasjoner for i størst mulig grad “løse opp” likningssystemet. Først tar vi å bytter de to radene og deretter tar vi  $-2$  ganger det som nå er første rad og legger til andre rad

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

Dette er en matrise på trappeform. Vi kan nå, for eksempel, bruke likning 2 til å uttrykke  $y$  ved hjelp av  $z$ . Deretter kan vi sette inn for  $y$  i likning 1 og uttrykke  $x$  ved hjelp av  $z$ .

Vi kan forenkle likningssystemet mer. Vi kan gjøre dette ved legge til 2 ganger rad 2 til rad 1. Vi ganger deretter rad 2 med  $-1$  for å få koeffisienten til  $y$  til å bli 1. Resultatet er

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

Dette er en matrise på redusert trappeform. Matrisen er den vi startet med i dette eksempelet.

En matrise **A** er på **trappeform** hvis den har egenskapen at alle rader bestående av nullelementer er neders i matrisen og posisjonen til det første ikke-null elementet i radene (som ikke bare består av null-elementer) er en ekte økende funksjon på rade-nummeret. De første ikke-null elementet i radene kalles de **ledende** elementene. En matrise er på **redusert trappeform** hvis den er på trappeform og alle ledende elementer er lik 1 samt at de ledende elementene er de eneste elementene ulik 0 i sine kolonner.

**Oppgave 7** Hvis vi ser bare på samlinger av 0-er til venstre i en matrise på trappeform så ser det ut som en trapp som går oppover mot venstre. Derav navnet trappeform. Steghøyden er lik, men inntrinnet kan ha ulik lengde. Det kan også være et platå av rader med 0-elementer nederst.

**Oppgave 8** Er det sant at alle matriser **A** er på trappeform hvis følgende egenskap er sann: For alle elementer  $a_{i,j}$  som er det elementet lengst til venstre i sin rad ulik 0, så er  $a_{k,l} = 0$  for  $k > i$  og  $l \leq j$ ?

Prosodyren vi har vist i de to eksemplene ovenfor kan utføres på alle matriser. Alle matriser er ekvivalent til en matrise på trappeform (bytt rader slik at ingen andre rader har elementer ulik 0 lengre til venstre for det første elementet ulik 0 i første rad. Arbeid deg rekursivt nedover radene). Videre fra en trappeform kan vi finne en ekvivalent matrise på redusert trappeform (arbeid deg oppover radene). Det finnes bare

en matrise på redusert trappeform som er ekvivalent til en gitt matrise. Vi sier at den er **entydig** bestemt av matrisen.

Prosedyren som leder frem til en matrise på trappeform (og videre til redusert trappeform) kalles **Gauss-eliminering**.

**Oppgave 9** *Skriv opp de utvidede matrisene til de to likningssystemene nedenfor. Benytt Gauss-eliminering og finn de ekvivalente matrisene på redusert trappeform. Benytt dem til å beskrive alle løsningene (hvis det er løsninger).*

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ 6x - 7y &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 3y - z &= 0 \\ 6x - 7y + z &= 1 \end{aligned}$$

Vi sier at radvektorene i en matrise er **lineært uavhengige** hvis matrisen er ekvivalent til en matrise på redusert trappeform uten rader med bare 0-elementer. Hver rad med bare null-elementer svarer til en rad som kan skrives som en lineær kombinasjon av de andre radene.

En  $m \times n$ -matrise må ha minst  $m - n$  rader med bare null-elementer når  $m > n$ . Derfor kan ikke radvektorene være lineært uavhengige. Minst  $m - n$  av dem kan skrives som en lineær kombinasjon av de andre radene.

**Oppgave 10 (Krevende)** *Lag overslag på maksimalt antall multiplikasjonsoperasjoner (av elementer) som behøvs for å utføre de Gauss-elimineringene fra en generell  $m \times n$ -matrise til en ekvivalent matrise på trappeform, og deretter fra en matrise på trappeform til en matrise på redusert trappeform.*

*Hint: Det kan være nyttig å benytte følgende*

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

## 4 Matrisealgebra

To matriser med samme dimensjoner kan legges sammen ved at vi legger de sammen elementvis. Vi kan også skalarmultiplisere dem ved å utføre skalarmultiplikasjonen elementvis. I det spesielle tilfellet av kolonne- og rad-vektorer får vi addisjon og skalar-multiplikasjon av vektorer. La oss nå betrakte kolonnevektorer av lengde  $n$ . Vektoren  $\mathbf{e}_i$  er kolonnevektoren som har alle elementer lik 0, bortsett fra elementet i posisjon  $i$ , som er lik 1. En vilkårlig kolonnevektor kan entydig uttrykkes som en lineær kombinasjon av disse vektorene.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$$



Vi kaller vektorene  $\mathbf{e}_i$  standart basisvektorer.

Multiplikasjon av matriser er definert slik at produktet av koeffisientmatrisen og søylevektoren med variablene, gir søylevektoren hvor elementene er de linære uttrykkene. For eksempel

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} a_{1,1}x + a_{1,2}y \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y \end{bmatrix}$$

Matriseprodukt er bare definert mellom en  $m \times k$  og en  $k \times n$ -matrise (ganget fra høyre). Resultatet er da en  $m \times n$ -matrise og element  $i, j$  er definert som skalarproduktet av  $i$ -te radvektor til den første matrisen og  $j$ -te kolonnevektor til den andre matrisen (lengst til høyre). For eksempel er produktet

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 5 & -2 \\ -7 & -5 & 8 & -6 \\ -5 & 0 & 15 & -10 \end{bmatrix}$$

**Oppgave 11** Regn ut produktet

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

**Oppgave 12** Regn ut produktet

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Oppgave 13** Vis at resultatet av å utføre radoperasjoner på et produkt av to matriser  $A \cdot B$  er det samme som om vi først utfører radoperasjonene på  $A$  og deretter ganget med  $B$  fra høyre.

Produktet av (kompatible) matriser er assosiativt det vil si at  $(A \cdot B) \cdot C$  er lik  $A \cdot (B \cdot C)$ . Multiplikasjonen er distributiv over addisjonen (vi kan gange ut parenteser). Produktet er derimot ikke kommutativt så rekkefølgen er av betydning. For eksempel så er

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dimensjonen til matrisene trenger ikke en gang være den samme for  $AB$  og  $BA$ . For eksempel er

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = [10]$$

Det kan også være at  $AB$  er definert men at  $BA$  ikke er definert.

**Nullmatrisen**  $\mathbf{0}$  av dimensjon  $m \times n$  er matrisen med denne dimensjon hvor alle elementene er lik 0. (Vi spesifiserer ikke dimensjonen.) Produktet av to tall ulik 0 er alltid ulik 0, men produkt av to matriser forskjellig fra null-matrisen kan godt bli lik null-matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi kan med fordel tenke på matrisemultiplikasjon  $\mathbf{AB}$  som at hver av kolonnene til matrisen  $\mathbf{B}$ , til venstre, gir en lineær kombinasjon av kolonnevektorene i  $\mathbf{A}$ .

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \cdots + x_n \vec{v}_n \end{bmatrix}$$

Samlingen  $M_n$  av  $n \times n$ -matriser er en algebra. Alle  $n \times n$ -matriser kan ganges sammen og resultatet er en  $n \times n$ -matrise.

## 5 Inversmatriser

En **kvadratisk matrise** er en matrise med like mange rader som kolonner. Alternativt snakker vi om en  $n \times n$ -matrise, uten å spesifisere hva  $n$  skal være. Elementene i posisjon  $(i, i)$  i en kvadratisk matrise, for ulike verdier av  $i$ , kalles for **diagonalelementene** til matrisen. **Identitetsmatrisen**  $\mathbf{1}_n$  av dimensjon  $n$  er den kvadratiske matrisen av dimensjon  $n \times n$  slik at alle de diagonale elementene er lik 1 og alle andre elementer er lik 0.

$$\mathbf{1}_1 = [1] \quad \mathbf{1}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{1}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrisene  $\mathbf{1}_n$  er på redusert trappeform. En  $n \times n$ -matrise har lineært uavhengige vektorer precis når matrisen er ekvivalent til  $\mathbf{1}_n$ .

Hvis  $\mathbf{A}$  er en  $m \times n$ -matrise, da er

$$\mathbf{1}_m \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \text{og} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{1}_n = \mathbf{A}$$

En  $n \times n$ -matrise  $\mathbf{A}$  er invertibel hvis det finnes en matrise  $\mathbf{B}$  slik at

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{1}_n \quad \text{og} \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}_n$$

Hvis det finnes en matrise  $\mathbf{B}$  med disse egenskapene er den bestemt av  $\mathbf{A}$ . Vi kaller den inversmatrisen til  $\mathbf{A}$  og skriver den som  $\mathbf{A}^{-1}$ .

En grunn til at inversmatriser er viktige er at de lar oss løse likningssett. Hvis vi har likningssystemet  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  og  $\mathbf{A}$  er inverterbar, da er løsningen gitt ved

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$$

Dette er spesielt nyttig hvis noen av koeffisientene i  $\mathbf{b}$  er parametre som vi ønsker å kunne justere.

Hvis  $\mathbf{A}$  og  $\mathbf{B}$  er to inverterbare kvadratiske matriser av samme dimensjon, da er produktet  $\mathbf{AB}$  også en inverterbar matrise og inversmatrisen er gitt ved

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Anta at  $\mathbf{A}$  er en kvadratisk matrise ekvivalent til identitetsmatrisen. Utfører vi de samme radoperasjoner på begge sider av likheten

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} = \mathbf{1}_n \mathbf{b}$$

helt til  $\mathbf{A}$  gjøres om til  $\mathbf{1}_n$  får vi  $\mathbf{x} = \mathbf{Bb}$  hvor  $\mathbf{B}$  er resultatet av å utføre radoperasjonene på  $\mathbf{1}_n$ . Vi får derfor  $\mathbf{Ax} = \mathbf{ABb} = \mathbf{b}$  for alle mulige  $\mathbf{b}$ . Spesielt er dette sant for basisvektorene  $\mathbf{e}_i$  fra  $i = 1$  til  $i = n$ . Derfor får vi likheten  $\mathbf{AB} = \mathbf{1}_n$ . Tilsvarende er  $\mathbf{BA} = \mathbf{1}_n$ . Matrisen  $\mathbf{B}$  er derfor inversmatrisen til  $\mathbf{A}$ . En fremgangsmåte for å finne inversmatrisen til en kvadratisk matrise  $\mathbf{A}$  (hvis det er mulig) er derfor som følger: Sett opp en  $n \times 2n$  matrise ved å sette sammen  $\mathbf{A}$  og identitetsmatrisen  $\mathbf{1}_n$  som  $[\mathbf{A}|\mathbf{1}_n]$ . Utfør radoperasjon for å føre  $\mathbf{A}$  over til redusert trappeform. Hvis  $\mathbf{A}$  har lineært uavhengige radvektorer ender vi da opp med  $\mathbf{1}_n$  i stede for  $\mathbf{A}$ . Resultatet av radoperasjonene på  $\mathbf{1}_n$  er inversmatrisen  $\mathbf{A}^{-1}$ . Vi ender altså opp med  $[\mathbf{1}_n|\mathbf{A}^{-1}]$ . Hvis den reduserte trappeformen ikke er identitetsmatrisen så er ikke  $\mathbf{A}$  inverterbar.

**Oppgave 14** Utfør denne prosedyren for en generell  $2 \times 2$ -matrise  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Sjekk svaret ved å gange sammen matrisen med sin inversmatrise (prøv begge sider) når matrisen har inversmatrise.

**Oppgave 15** Undersøk om matrisene

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & -15 \\ 8 & 40 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

har inversmatriser og finn inversmatrisene om de eksisterer.

Vis at den utvida konjugatsetningen gir

$$(\mathbf{1}_n - \mathbf{X})(\mathbf{1}_n + \mathbf{X} + \mathbf{X}^2 + \mathbf{X}^3 + \dots + \mathbf{X}^k) = \mathbf{1}_n - \mathbf{X}^{k+1}$$

for alle matriser  $\mathbf{X}$ . Dette gir oss en metode for å finne tilnærminger til inversmatriser. For eksempel hvis vi bare har små avvik fra identitetsmatrisen så kan den skrives som  $\mathbf{1}_n - \mathbf{X}$  hvor  $\mathbf{X}^k$  raskt blir liten når  $k$  øker. Hvis matrisen kan skrives som enten en øvre eller nedre triangulær matrise med 1 som diagonalelementer, da kan vi velge avviket  $\mathbf{X}$  til å være ekte øvre eller ekte nedre triangulær. Da har vi at  $\mathbf{X}^n = \mathbf{0}$  hvor  $n$  er dimensjonen til de kvadratiske matrisene. I dette tilfellet får vi gitt  $(\mathbf{1}_n - \mathbf{X})^{-1}$  eksakt ved å ta med  $n$  ledd i ekspansjonen.

## 6 Transponering av en matrise

Den **transponerte** til en  $m \times n$ -matrise er  $n \times m$ -matrise hvor søylevektorene er gjort om til radvektorer. Vi skriver den transponerte til  $A$  som  $A^T$ . Elementet  $i, j$  i  $A^T$  er lik elementet  $j, i$  i  $A$ . Hvis vi transponerer en matrise to ganger får vi den opprinnelige matrisen tilbake igjen. En kvadratisk matrise kalles **symmetrisk** hvis den er lik sin egen transponerte. Dette er det samme som at elementet  $a_{i,j}$  er lik elementet  $a_{j,i}$  for alle  $i$  og  $j$ . Matrisen er **antisymmetrisk** (skjevsymmetrisk) hvis den er lik  $-1$  ganger sin transponerte.

**Oppgave 4** *Vis at*

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

*for alle matriser  $A$  og  $B$  slik at produktet  $AB$  er definert. Dette sier at den transponerte av et produkt av to matriser er lik produktet av de transponerte matrisene ganget sammen i motsatt rekkefølge.*

**Oppgave 16** *Likningssystemet  $Ax = b$  er ekvivalent til  $x^T A^T = b^T$ . Fortolk dette.*

En kvadratisk matrise er **øvre triangulær** hvis alle elementer ulik null er på eller ovenfor diagonalen til matrisen. En kvadratisk matrise er **nedre triangulær** hvis alle elementer ulik null er på eller nedenfor diagonalen til matrisen. En matrise er derfor øvre triangulær er derfor det samme som at den transponerte til matrisa er nedre triangulær. En fellesbetegnelse er for de to typene matriser er **triangulær** matrise. En kvadratisk matrise på trappeform er alltid en øvre triangulær matrise. Hvis alle diagonalelementen til en  $n \times n$ -matrise på trappeform er forskjellig fra null så har matrisen på trappeform  $n$  ledende elementer.

Transponerer vi en øvre triangulær matrise får vi en nedre triangulær matrise, og omvendt. Vi kan kalle en matrise ekte triangulær hvis den er triangulær og alle diagonalelementene er lik 0.

Produktet av to øvre triangulære matriser er igjen en øvre triangulær matrise.

Alle matriser er lik et produkt av en nedre og en høyre triangulær matrise. En faktorisering som et slikt produkt hvor den nedre triangulære matrisen er til venstre i produktet kalles en LU-faktorisering. Det kommer fra engelsk: "lower and upper triangular matrices".

I hvilken grad er en slik faktorisering unik?

**Oppgave 17** *Vis at produktet av to øvre triangulære matriser er igjen en øvre triangulær matrise. Vis at at produktet av en matrise  $\mathbf{A}$  og en matrise  $\mathbf{B}$  med egenskapene at  $a_{i,j} = 0$  for  $i > j - n_1$  og  $b_{i,j} = 0$  for  $i > j - n_2$  har egenskapen at elementene i posisjon  $i, j$  er null for  $i > j - (n_1 + n_2)$ .*

*Spesielt vis at en kvadratisk matrise  $\mathbf{A}$  av dimensjon  $n$  slik at  $a_{i,j} = 0$  for  $j \leq i$  (ekte øvre triangulær) har egenskapen at  $\mathbf{a}^n = \mathbf{0}$ .*

**Oppgave 18** *La  $\mathbf{A}$  være en vilkårlig øvre triangulær matrise. Matrisen er inverterbar presis når alle diagonalelementene er ulik 0. Vis at inversmatrisen til  $A$  er igjen en øvre triangulær matrise. Hva er diagonalelementene til inversmatrisen uttrykt ved hjelp av diagonalelementene til matrisen  $A$ ?*

**Oppgave 19** *Vis at matriser kan skrives som et produkt av en nedre og en øvre triangulær matrise hvor den nedre triangulære matrisen er til høyre. Vis at nversmatrisen til en inverterbar øvre triangulær matrise er igjen en øvre triangulær matrise.*

## 7 Determinanter

Det kan være nyttig å regne eksplisitt på determinanter for  $2 \times 2$  matriser før du går gjennom den mer abstrakte teorien i denne delen. Vi definerer

$$\det \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = ad - bc$$

**Oppgave 5** *Sjekk at determinanten er lineær i hver av de to radene og i hver av de to søylene (respekterer sum og skalarmultiplikasjon). Sjekk at determinanten er uendret under transponering. At determinanten til et produkt av to  $2 \times 2$ -matriser er produktet av determinanten til de to matrisene. Videre sjekk at determinanten skifter fortegn hvis de to raden bytter plass eller hvis de to kolonnene bytter plass.*

Vi skal nå se på funksjoner som tilordner en skalar til  $n$  vektorer av lengde  $n$ . Vi krever at funksjonen skal være lineær i hver vektor-variabel. Videre ser vi på funksjoner med egenskapen at bytter vi om to av vektorene så skal funksjonen skifte fortegn. Vi sier gjerne at funksjonen er antisymmetrisk. Det viser seg at slike funksjoner er entydig bestemt opp til å gange dem med en konstant. Hvis vi krever at funksjonen på vektorene  $e_1, \dots, e_n$  (i denne rekkefølgen) skal gi verdien 1 så er det akkurat en funksjon med disse egenskapene. Vi ordner de  $n$  vektorene i en matrise. La oss kalle den for  $A$ . Om vektorene er søyle eller radvektorer spiller ingen rolle. Funksjonen blir den samme.

Denne funksjonen kalles **determinanten** til  $n \times n$  matrisen. Vi skriver gjerne dette som  $\det(A)$  eller av og til den mer slumsete notasjonen  $|A|$ . Sistnevnte bør ikke brukes sammen med absoluttverdien til determinanten.

Determinanten  $\det(A)$  er ved linearitet lik summen over hver av variablene  $i_1, \dots, i_n$  fra 1 til  $n$ . (Dette er en sum med  $n^n$  ledd.)

$$a_{1,i_1} \cdots a_{n,i_n} \det(e_{i_1} \dots e_{i_n})$$

Vi får bare bidrag når alle  $i_1, \dots, i_n$  er forskjellige fra hverandre. Har vi to like vektorer i determinanten så må den være lik sin egen additive invers, og derfor lik 0. Grunnen til det er at determinanten skifter fortegn hvis vi bytter de to vektorene, men siden vektorene er like forblir determinanten uendra under ombytte.

**Oppgave 6** *Vis at en diagonal matrise har determinant lik produktet av alle diagonalelementene.*

Permutasjoner av  $n$  element er omstokkinger av de  $n$  elementene til en annen rekkefølge. La  $s$  være en slik omstokking og la  $s(1), s(2), \dots, s(n)$  være rekkefølgen som  $1, 2, \dots, n$  er byttet om til. For eksempel er permutasjonene av 1, 2 identitetspermutasjonen (som ikke bytter noen tall) og permutasjonen  $(2, 1)$  som bytter to tall. Permutasjonene til 1, 2, 3 er

$$(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$$

og

$$(2, 1, 3), (3, 2, 1), (1, 3, 2)$$

De tre først er jevne permutasjoner (et jevn antall bytte av elementer fra det opprinnelige). De tre siste er odde permutasjoner (et odde antall bytte av elementer fra det opprinnelige oppsettet). Generelt er det  $n!$  forskjellige permutasjoner av  $n$  elementer.

Vi trenger bare ta med ledd i summen for determinanten hvor  $i_1, \dots, i_n$  er forskjellige. Determinanten er derfor lik summen over

$$a_{1,s(1)} \cdots a_{n,s(n)} \det(e_{s(1)} \cdots e_{s(n)})$$

for alle permutasjoner  $s$ . Determinanten  $\det(e_{s(1)} \cdots e_{s(n)})$  er 1 hvis permutasjonen er jevn og  $-1$  hvis permutasjonen er odde. Vi skriver gjerne dette fortegnet som  $(-1)^s$ . Derfor er determinanten summen over de  $n!$  leddene

$$(-1)^s a_{1,s(1)} \cdots a_{n,s(n)}$$

for alle permutasjoner  $s$ .

Samme argument med radvektorer i stede for søylevektorer gir akkurat samme funksjon (når rekkefølgen på vektorene opprettholdes: venstre mot høyre eller ovenfra og ned.) Å skifte vektorene fra rad til søyle vektorer svarer til å transponere matrisen med vektorene. Derfor har vi

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Utfører vi radoperasjoner på en matrise vil determinanten til matrisen endre seg som følger:

1. Legger vi en skalar ganget med en rad til en annen rad så endres ikke determinanten.
2. Ganger vi en rad med en skalar  $c$  så er determinanten til den nye matrisen  $c$  ganget med determinanten til den gamle
3. Bytter vi om to rader så skifter determinanten fortegn

Hvis en matrise er triangulær så er determinanten til matrisen lik produktet av diagonalelementene. En prosedyre for å finne determinanter er derfor å utføre radoperasjoner til matrisen overføres til en ekvivalent matrise på triangulær form. Determinanten til matrisen er da lik produktet av diagonalelementene til den ekvivalente matrisen på trappeform delt med produktet av alle skalarene som rader ble ganget med under radoperasjonene samt snu fortegnet hvis et odde antall radbytter ble utført.

Overnevnte metode krever omlag  $n^3$  multiplikasjonsoperasjoner. Den rekursive definisjonen av determinanter krever  $n!$  regneoperasjoner.

Determinanten til en matrise er 0 hvis de  $n$  radvektorene (eller ekvivalent søylevektorene) ikke er lineært uavhengige og ulik 0 hvis de er lineært uavhengige.

Vi skal nå forklare hvorfor determinanten til et produkt av to kvadratiske matriser er produktet av determinanten til hver av dem

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

Argumentet går ut på å observere at for en fast  $B$  er  $\det(AB)$  en funksjon som tar inn  $n$  radvektorer og gir ut en skalar. Funksjonen er lineær i hver av radvektorene samt antisymmetrisk. Den er derfor lik  $\det(A)$  ganget med verdien til identitetsmatrisen. Når  $A$  er identitetsmatrisen er  $\det(AB) = \det(\mathbf{1}_n B) = \det(B)$ . Derfor er  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ .

Spesielt har vi at

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(\mathbf{1}_n) = 1$$

så  $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ .

Gitt en  $n \times n$ -matrise  $\mathbf{A}$ . Determinanten til  $(n-1) \times (n-1)$ -matrisen hvor vi har fjernet rad  $i$  og kolonne  $j$  kalles  $(i, j)$ -minoren til  $A$ . Det er  $n^2$  minorer til matrisen  $\mathbf{A}$ , en for hver posisjon til elementene. Denne determinanten er en multilinær funksjon som tar inn  $n-1$   $n$ -vektorer, er antisymmetrisk med hensyn til bytter av vektorer, sender vektoren  $\mathbf{e}_i$  til 0.

Dette er resultatet av enten å erstatte rad  $i$  med vektoren  $\mathbf{e}_j$  eller erstatte kolonne  $j$  med  $\mathbf{e}_i$ . Starter vi med en av disse tilfellene kan vi utføre rad eller søyle operasjoner slik at matrisen har både vektor  $\mathbf{e}_j$  i rad  $i$  og vektoren  $\mathbf{e}_i$  i søyle  $j$ . Ved å utføre  $j$  bytter for å forflytte kolonnevektoren med  $\mathbf{e}_j$  helt til venstre og deretter  $i$  bytter av rader for å forflytte søyle  $i$  helt til tops får vi

Rekursiv beskrivelse av determinant.

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{s=1}^n (-1)^{i+s} a_{i,s} M_{i,s}$$

for  $s = 1 \dots n$ . Tilsvarende kan determinanten regnes ut kolonnevis (transponer matrisen).

## 8 Kramers regel

Anta at  $\det(A) \neq 0$  så søylevektorene (og radvektorene) i matrisen er lineært uavhengige. Det finnes da, for all vektorer  $b$ , en entydig løsningsvektor  $x$  av likningssystemet

$$Ax = b.$$

Løsningen  $x$  er en lineær funksjon i  $b$ . La  $x_i(b)$  være det  $i$ -te elementet i  $x$  som en funksjon av  $b$ . Siden  $Ae_j$  er lik den  $j$ -te kolonnen  $K_j$  til  $A$  så er  $x_i(K_j)$  lik 1 hvis  $i = j$  og 0 ellers. Vi beskriver en lineær funksjon med disse egenskapene ved hjelp av determinanter. La  $A_i(b)$  være determinanten til  $n \times n$  matrisen vi får ved å erstatte kolonne  $i$  med kolonnevektoren  $b$ . Da har vi at  $A_i(K_j)$  er lik  $\det(A)$  hvis  $i = j$  og null ellers (siden vi da får to identiske kolonner). Derfor får vi følgende resultat, som kalles **Kramers regel**,

$$x_i(b) = \frac{A_i(b)}{\det(A)}$$

Som en konsekvens kan vi finne en beskrivelse av inversmatrisen til en kvadratisk matrise med determinant ulik 0 beskrevet ved minorer og determinanten til matrisen.

Siden  $AA^{-1} = \mathbf{1}_n = [e_1, \dots, e_n]$  så er  $j$ -te rad til  $A^{-1}$  løsningen til linkningssystemet

$$Ax = e_j$$

Fra Kramers regel er derfor elementet

$$(A^{-1})_{i,j} = \frac{A_i(e_j)}{\det(A)}$$

Determinanten  $A_i(e_j)$  er lik determinanten til matrisen hvor  $i$ -te faktor er erstattet av  $e_j$  og hvor  $j$ -te rad er lik  $e_i$  (benytt kolonneoperasjoner til å finne en matrise med samme determinant hvor hver av de andre elementene i raden alle er lik 0). Vi kan forflytte rad  $j$  opptil første rad og deretter  $j$ -te kolonne frem til første kolonne. Dette krever  $i + j$  radoperasjoner. Determinanten til denne matrisen er lik  $(i, j)$ -minoren til matrisen. Siden vi har benyttet  $i + j$  radoperasjoner er determinanten  $A_i(e_j)$  lik cofaktoren  $C_{j,i}$ , som er lik elementet  $i, j$  til den adungerte matrisen  $\text{adj}(A)$ . Derfor er

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$$

Vi har derfor at en kvadratisk matrise  $A$  har en inversmatrise hvis og bare hvis determinanten  $\det(A)$  er ulik 0.

Denne eksplisitte formelen for inversmatrisen er ikke en effektiv måte å finne inversmatrisen til store matriser.

**Oppgave 20** Sjekk at beskrivelsen av inversmatrisen ovenfor gir

$$\det \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = ad - bc$$

**Oppgave 21** Vis at inversmatrisen til en inverterbar matrise med rasjonale elementer er igjen en matrise med rasjonale elementer. Vis videre at hvis  $r$  er en felles faktor for alle elementene i matrisen da er

$$r^n \det(A) A^{-1}$$

en matrise hvor alle elementene er heltall.

## 9 Lineære transformasjoner

Vi skal nå fortolke  $m \times n$ -matriser som en funksjon fra  $\mathbb{R}^n$  til  $\mathbb{R}^m$ . En  $m \times n$ -matrise  $\mathbf{M}$  definerer en funksjoner ved å sende  $n$ -vektoren  $\mathbf{x}$  til  $m$ -vektoren  $\mathbf{M}\mathbf{x}$ . Denne funksjonen har egenskapen at den respekterer både addisjon og skalarmultiplikasjon i de to vektorrommene.

$$\mathbf{M}c\mathbf{x} = c\mathbf{M}\mathbf{x} \quad \mathbf{M}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{M}\mathbf{x}_1 + \mathbf{M}\mathbf{x}_2$$

En funksjon mellom vektorrom med disse to egenskapene kalles en **lineær transformasjon**. Faktisk er alle lineære transformasjoner mellom (endeligdimensjonale) vektorrom (med en valgt basis, slik at vektorene kan beskrives med koordianter) gitt ved



en matrise. Vi viser dette nå. Vi minner om at  $\mathbf{e}_i$  er vektoren som har alle elementer lik 0, bortsett fra elementet i posisjon  $i$ , som er lik 1. En vektor i  $\mathbb{R}^n$  er entydig uttrykt som en lineær kombinasjon av disse vektorene.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

La nå  $T$  være en funksjon fra  $\mathbb{R}^n$  til  $\mathbb{R}^m$  som er lineær. Da har vi at

$$T(\mathbf{x}) = x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n)$$

Vi lager nå en  $m \times n$ -matrise  $\mathbf{T}$  ved å la rekke nummer  $i$  være lik  $T(\mathbf{e}_i)$ . Da har vi at

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{T}\mathbf{x}$$

hvor produktet av  $\mathbf{T}$  med  $\mathbf{x}$  fra venstre er gitt ved matrisemultiplikasjon. Matrisen  $\mathbf{T}$  kalles **standardmatrisen** til transformasjonen.

Vi kan nå se på noen eksempler. Refleksjon om  $x$ -aksen i planet  $\mathbb{R}^2$  er en lineær transformasjon. Standardmatrisen er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Slik er det fordi  $\mathbf{e}_1$  er uendra mens  $\mathbf{e}_2$  skifter fortegn under transformasjonen.

Rotasjon med en vinkel  $v$  i positiv retning i planet har standardmatrise

$$\begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) \\ \sin(v) & \cos(v) \end{bmatrix}$$

Dette er slik fordi  $\mathbf{e}_1$  sendes til  $\cos(v)\mathbf{e}_1 + \sin(v)\mathbf{e}_2$  og  $\mathbf{e}_2$  sendes til  $\cos(v)\mathbf{e}_2 - \sin(v)\mathbf{e}_1$ .

**Oppgave 22** Finn standardmatrisen til rotasjon om  $y$  og  $z$  akse også (pass på at du roterer i positiv retning).

**Oppgave 23** Regn ut begge produktene av rotasjon 90 grader om  $x$ -aksen og rotasjon 90 grader om  $z$ -aksen. Sjekk at resultatene faktisk stemmer med det du får ved å rotere et aksesystem 90 grader først om den ene og så om den andre akse.

En **projeksjon** er en lineær transformasjon fra  $\mathbb{R}^n$  til seg selv med egenskapen at  $P^2 = P$ . Et element som er lik sitt eget kvadrat kalles et **idempotent** element.

**Oppgave 24** Vis at projeksjonen i planet ned til linjen gjennom origo med retningsvektor  $[a, b] \neq \mathbf{0}$  er gitt ved

$$\frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix}$$

Sjekk at kvadratet av denne matrisen faktisk er lik seg selv.

**Oppgave 25** Avgjør om følgende avbildninger fra planet til seg selv er lineære eller ikke. Hvis transformasjonene er lineære finn standardmatrisen for transformasjonen.

1. Prosjeksjonen til linjen som går gjennom punktet  $(1, 0)$  og som er parallell til vektoren  $[1, 1]$
2. Prosjeksjonen til linjen som går gjennom punktet  $(4, -12)$  og som er parallell til linjen  $[-1, 3]$ .
3. avbildningen som sender  $(x, y)$  til  $(xy, 0)$
4. funksjonen som sender  $(x, y)$  til  $(\sqrt{x^2}, 0)$
5. Avbildningen vi får ved å bytte om  $x$ - og  $y$ -koordinaten.

Vi beskriver nå projektsjonen ned til et plan gjennom origo i rommet. Anta at planet er utspent av to vektorer  $\mathbf{u}_1$  og  $\mathbf{u}_2$ . Alle vektorer fra origo til et vilkårlig punkt på planet er da på formen  $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2$  for skalarer  $c_1$  og  $c_2$ . For å gjøre beskrivelsen av projektsjonen mer oversiktlig vil vi videre anta at begge vektorene har lengde 1 og at der er ortogonale (står vinkelrett på hverandre). Vi kan alltid sørge for det ved å ta komponenten  $\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{u}_1 / |\mathbf{u}_1|$  til  $\mathbf{u}_2$  som er vinkelrett på  $\mathbf{u}_1$ , og til sist normalisere disse to ortogonale vektorene.

Vi lager en  $3 \times 2$ -matrise av disse to vektorene

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$$

Da har vi at

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{1}_2$$

Vi undersøker hva projektsjonen gjør med hver av basisvektorene  $\mathbf{e}_i$ . Projektsjonen ned i planet er

$$(\mathbf{u}_1 \bullet \mathbf{e}_i) \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2 \bullet \mathbf{e}_i) \mathbf{u}_2$$

fra våre antakelser om vektorene  $\mathbf{u}_1$  og  $\mathbf{u}_2$ . Standardmatrisen til projektsjonen er derfor

$$[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \end{bmatrix} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T$$

Legg merke til at

$$(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T) \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T) = \mathbf{U} \cdot (\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U}) \cdot \mathbf{U}^T = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}^T$$

**Oppgave 26** Vi betrakter følgende plan gjennom origo utspent av de ortonormale vektorene

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, -1, 0] \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1]$$

Vis at standardmatrisa til projektsjonen til planet er gitt ved

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(Sjekk gjerne at matrisen er idempotent og at den bevarer vektorene  $\mathbf{u}_1$  og  $\mathbf{u}_2$  mens en normalvektor til planet slik som  $[1, 1, -2]$  sendes til  $\mathbf{0}$ .)

En løsning til likningsystemet  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  kalles en **partikulær løsning**. En løsning til likningsystemet  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  kalles en **homogen løsning**.

**Oppgave 27** *Vis at samlingen av homogene løsninger til et likningsystem har egenskapen at det er lukket under addisjon og skalarmultiplikasjon. Vis med eksempel hvordan dette feiler for løsninger til et likningsystem  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , hvor  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ .*

**Oppgave 28** *Hvis  $\mathbf{x}$  og  $\mathbf{y}$  begge er løsninger til likningsystemet da er differanse  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  en løsning til det homogene likningsystemet  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ .*

*Vis at alle løsninger til likningsystemet  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  består av summen av en fast partikulær løsning pluss alle mulige homogene løsninger til likningen.*

**Oppgave 29** *La nå  $T$  være en funksjon fra  $\mathbb{R}^n$  til  $\mathbb{R}^m$  som er lineær. La  $A$  være en  $n \times k$ -matrise, og la  $\mathbf{v}$  være en  $k$ -kolonnevektor. Vis følgende*

$$T(A\mathbf{v}) = T(A)\mathbf{v}$$

*Her betyr  $T(A)$  at transformasjonen  $T$  utføres på hver av kolonnevektorene.*

## 10 Rang til en matrise

**Nullrommet** til en matrise  $\mathbf{M}$  er alle vektorene som avbilder til null-vektoren under den lineære transformasjonen som matrisen definerer. **Kolonnerommet** til en vektor er alle vektorer som er i bilde av transformasjonen. Det vil si at alle vektorer som er på formen  $\mathbf{Mx}$  for en vektor  $\mathbf{x}$ . Dimensjonen til kolonnerommet kalles **rangen** til matrisen. Rangen til en matrise  $\mathbf{A}$  skrives  $\text{rang}(\mathbf{A})$ . **Raderommet** til en matrise er alle vektorer som er en kombinasjon av radene i matrisen. Raderommet til  $\mathbf{M}$  er det samme som kolonnerommet til den transponerte matrisen  $\mathbf{M}^T$ .

Hvis to matriser er (rad)-ekvivalente så er både nullrommet og raderommet også ekvivalente. Kolonnerommene vil ikke være ekvivalente, men dimensjonen til kolonnerommene vil være like. Dette kan vi se som følgende: Hvis kolonnevektorene nummer  $i_1, \dots, i_k$  i matrisen ( $A$ ) er lineært uavhengige, da er også kolonnevektorene nummer  $i_1, \dots, i_k$  lineært uavhengige i alle ekvivalente matrise. Derfor er dimensjonen til to ekvivalente matrise større enn eller lik hverandre, og derfor like.

Vi viser nå hvordan vi kan finne nullrommet og raderommet fra den ekvivalente matrisen på redusert trappeform. Raderommet har basis radvektorene i matrisen på redusert trappeform. For hver  $i$ , slik at det ikke er et ledende element i kolonne  $i$ , finner vi en vektor i nullrommet med elementet i posisjon  $i$  lik 1 og alle elementer i posisjon  $k$ , for  $k > i$ , lik 0. Det er mulig å finne slike vektorer fra konstruksjonen av en matrise på trappeform. Disse vektorene er alle i nullrommet og de er lineært uavhengige. Vi kan ikke ha vektorer i nullrommet som har elementet lengst til høyre ulik null i en søyle hvor det er et ledende element. Nullrommet er derfor generert av disse vektorene vi har konstruert. Dimensjonen til nullrommet er derfor lik dimensjonen til matrisen minus dimensjonen til raderommet.

Hvis vi velger kolonnevektorene til matrisen i posisjonene hvor det er et ledende element i en ekvivalent matrise på trappeform får vi lineært uavhengige vektorer. Legger vi til en annen kolonnevektore er systemet lineært avhengig (siden det er opplagt

tilfelle for den trappereduserte matrisen). Derfor utgjør disse vektorene en basis for kolonnerommet.

Vi konkluderer med at rangen  $\text{rang}(\mathbf{M})$  til en matrise  $\mathbf{M}$  er lik antall ledende elementer til matrisen på trappeform, som er lik både dimensjonen til raderommet og til kolonnerommet. Summen av rangen og dimensjonen til nullrommet er lik antall kolonner i matrisen.

**Oppgave 30** *Vis at en  $m \times n$ -matrise har et null-rom som har dimensjon minst  $|m-n|$ . Spesielt er dimensjonen alltid positiv for ikke-kvadratiske matriser.*