Drill i derivasjon

Forkurset, våren 2007

1 Drill i produktregelen

Deriver funksjonene ved hjelp av produktregelen $(uv)' = u'v + uv'$.

Eksempel

For funksjonen $f(x) = x \sin x$ setter vi $u = x$ og $v = \sin x$. Med $u' = 1$ og $v' = \cos x$ får vi

$$f'(x) = \sin x + x \cos x.$$

a) $f(x) = x \cos x \rhd f'(x) = \cos x - x \sin x$

b) $f(x) = x \tan x \rhd f'(x) = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$

c) $f(x) = xe^x \rhd f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

d) $f(x) = x \ln x \rhd f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$

e) $f(x) = e^x \sin x \rhd f'(x) = e^x(\sin x + \cos x)$

f) $f(x) = e^x \cos x \rhd f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$

g) $f(x) = (x^2 + 3x - 1)e^x \rhd f'(x) = (2x + 3)e^x + (x^2 + 3x - 1)e^x = e^x(x^2 + 5x - 1)$

h) $f(x) = \sin(x) \cos(x) \rhd f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

i) $f(x) = x\sqrt{x} \rhd f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$

j) $f(x) = \sin(x) \ln(x) \rhd f'(x) = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$

k) $f(x) = \sqrt{x}e^x \rhd f'(x) = e^x(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}})$

l) $f(x) = \sqrt{x} \cos x \rhd f'(x) = \frac{cos x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \sin x$

m) $f(x) = \sqrt{x} \sin x \rhd f'(x) = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos x$

n) $f(x) = x^5 \cos x \rhd f'(x) = 5x^4 \cos x - x^5 \sin x$

o) $f(x) = x^8 \sin x \rhd f'(x) = 8x^7 \sin x + x^8 \cos x$

p) $f(x) = x^{10} \cos x \rhd f'(x) = 10x^9 \cos x - x^{10} \sin x$

q) $f(x) = x^2 \sin x \rhd f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$

r) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}e^x \rhd f'(x) = e^x(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}})$

s) $f(x) = x^{-2} \ln x \rhd f'(x) = -2x^{-3} \ln x + x^{-2}\frac{1}{x} = x^{-3}(-2 \ln x + 1)$

t) $f(x) = x^{-1}e^x \rhd f'(x) = e^x(-x^{-2} + x^{-1}) = \frac{e^x}{x}(1 - \frac{1}{x})$

u) $f(x) = x^{-1} \ln x \rhd f'(x) = x^{-2}(1 - \ln x)$

v) $f(x) = \cos x \tan x \rhd f'(x) = -\sin x \tan x + \cos x\frac{1}{\cos^2 x} = \cos x$

2 Drill i brøkregelen

Deriver funksjonene ved hjelp av brøkregelen $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

Eksempel

For funksjonen $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ setter vi $u = x$ og $v = \sin x$. Med $u' = 1$ og $v' = \cos x$ får vi

$$f'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}.$$

a) $f(x) = \frac{x}{x+1} \triangleright f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

b) $f(x) = \frac{1}{x+1} \triangleright f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x+1} \triangleright f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

d) $f(x) = \frac{3x+2}{5x-8} \triangleright f'(x) = \frac{-34}{(5x-8)^2}$

e) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2+1} \triangleright f'(x) = \frac{-2(x^2-x-1)}{(x^2+1)^2}$

f) $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \triangleright f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$

g) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \triangleright f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$

h) $f(x) = \frac{e^x}{x-1} \triangleright f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$

i) $f(x) = \frac{e^x}{\sin x} \triangleright f'(x) = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$

j) $f(x) = \frac{e^x}{\ln x} \triangleright f'(x) = \frac{e^x(x\ln x - 1)}{x(\ln x)^2}$

k) $f(x) = \frac{\ln x - 2}{x} \triangleright f'(x) = \frac{3-\ln x}{x^2}$

l) $f(x) = \frac{3-\ln x}{x^2} \triangleright f'(x) = \frac{2\ln x - 7}{x^3}$

m) $f(x) = \frac{x^{12}+8x^3-24}{x^2+3x-2} \triangleright f'(x) = \frac{10x^{13}+33x^{12}-24x^{11}+8x^4+48x^3+48x^2+48x+72}{(x^2+3x-2)^2}$

3 Drill i kjerneregelen

Deriver funksjonene ved hjelp av kjerneregelen: For en funksjon $f(x) = f(u(x))$ med kjerne $u(x)$ er den deriverte med hensyn på x gitt ved $f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$.

Eksempel

For funksjonen $f(x) = \sin(x^2)$ bruker vi kjerne $u(x) = x^2$ med ytre funksjon $f(u) = \sin u$. De deriverte er $u'(x) = 2x$ og $f'(u) = \cos u$ slik at

$$f'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = \cos u \cdot 2x = 2x\cos(x^2).$$

a) $f(x) = e^{5x} \triangleright f'(x) = 5e^{5x}$

b) $f(x) = \sin(3x) \triangleright f'(x) = 3\cos(3x)$

c) $f(x) = \cos(2x) \triangleright f'(x) = -2\sin(2x)$

d) $f(x) = \cos(3x+1) \triangleright f'(x) = -3\sin(3x+1)$

e) $f(x) = \sin(12x-7) \triangleright f'(x) = 12\cos(12x-7)$

f) $f(x) = \sin^3 x \triangleright f'(x) = 3\cos(x)\sin^2(x)$

g) $f(x) = \cos^4 x \triangleright f'(x) = -4\sin(x)\cos^3(x)$

h) $f(x) = \ln(9x+4) \triangleright f'(x) = \frac{9}{9x+4}$

i) $f(x) = \ln(x^2+1) \triangleright f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

j) $f(x) = \ln(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1) \triangleright f'(x) = \frac{x^2+4x-3}{\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x+1}$

k) $f(x) = \sqrt{x^2+1} \triangleright f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

l) $f(x) = \sqrt{3x^4+8x^2} \triangleright f'(x) = \frac{6x^3+8x}{\sqrt{3x^4+8x^2}}$

m) $f(x) = e^{-x} \triangleright f'(x) = -e^{-x}$

n) $f(x) = e^{x^2} \triangleright f'(x) = 2xe^{x^2}$

o) $f(x) = \cos(x^2) \triangleright f'(x) = -2x\sin(x^2)$

p) $f(x) = (2x+3)^{17} \triangleright f'(x) = 34(2x+3)^{16}$

q) $f(x) = (\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^2)^9 \triangleright f'(x) = 3x(x^2+1)(\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^2)^8$

r) $f(x) = \ln(\cos x) \triangleright f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

s) $f(x) = e^{\sin x} \triangleright f'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$

t) $f(x) = \cos(e^x) \triangleright f'(x) = -e^x \sin(e^x)$

u) $f(x) = \ln(e^x) \triangleright f'(x) = 1$

v) $f(x) = \sin(\ln x) \triangleright f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$

w) $f(x) = \ln(\sin x) \triangleright f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$

4 Kombinasjon av regler

I denne seksjonen må du kombinere reglene over for å derivere funksjonene.

Eksempel

For funksjonen $f(x) = x\sin(x^2)$ kan vi sette $u = x$ og $v = \sin(x^2)$ for å bruke produktregelen. Vi har $u' = 1$. Vi finner $v' = 2x\cos(x^2)$ med kjerneregelen som i eksemplet over. Det gir

$$f'(x) = u'v + uv' = 1 \cdot \sin(x^2) + x \cdot (2x\cos(x^2)) = \sin(x^2) + 2x^2\cos(x^2).$$

a) $f(x) = x\cos(x^2) \triangleright f'(x) = \cos(x^2) - 2x^2\sin(x^2)$

b) $f(x) = xe^{x^2} \triangleright f'(x) = e^{x^2}(1 + 2x^2)$

c) $f(x) = \sin(x^2)\cos(x^2) \triangleright f'(x) = 2x\cos^2(x^2) - 2x\sin^2(x^2)$

d) $f(x) = \ln(\sin(x^2)) \triangleright f'(x) = \frac{2x\cos(x^2)}{\sin(x^2)}$

e) $f(x) = x^2e^x\cos x \triangleright f'(x) = 2xe^x\cos x + x^2e^x\cos x - x^2e^x\sin x$

f) $f(x) = \frac{\ln(7x+5)-2}{7x+5} \triangleright f'(x) = \frac{21-7\ln(7x+5)}{(7x+5)^2}$

5 Derivasjonsformler

I disse oppgavene skal du lage egne formler. Bokstavene a, b, c og d er reelle tall mens n betegner et heltall. Du å selv avgjøre hvilke regler du vil bruke.

Eksempel

Funksjonen $f(x) = \sin(ax+b)$ har kjerne $u(x) = ax+b$ med derivert $u'(x) = a$. Kjerneregelen gir

$$f'(x) = (\sin u)' \cdot u'(x) = \cos(u) \cdot a = a\cos(ax+b).$$

a) $f(x) = \cos(ax+b) \triangleright f'(x) = -a\sin(ax+b)$

b) $f(x) = e^{ax} \triangleright f'(x) = ae^{ax}$

c) $f(x) = \ln(ax+b) \triangleright f'(x) = \frac{a}{ax+b}$

d) $f(x) = \ln(ax^2+bx+c) \triangleright f'(x) = \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$

e) $f(x) = (ax+b)^n \triangleright f'(x) = an(ax+b)^{n-1}$

f) $f(x) = \sqrt{ax+b} \triangleright f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

g) $f(x) = \cos(ax)\sin(bx) \triangleright f'(x) = -a\sin(ax)\sin(bx) + b\cos(ax)\cos(bx)$

h) $f(x) = e^{ax}\sin(bx) \triangleright f'(x) = e^{ax}(a\sin(bx) + b\cos(bx))$

i) $f(x) = e^{ax}\cos(bx) \triangleright f'(x) = e^{ax}(a\cos(bx) - b\sin(bx))$

j) $f(x) = \sin^n x \triangleright f'(x) = n\cos(x)\sin^{n-1}(x)$

k) $f(x) = \cos^n x \triangleright f'(x) = -n\sin(x)\cos^{n-1}(x)$

l) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \triangleright f'(x) = \frac{ad-cb}{(cx+d)^2}$