Prøve i	Matematikk 1000 BYFE DAFE 1000
Dato:	29. mai 2017
Hjelpemiddel:	Kalkulator og formelark

Løsningsforslag

Oppgave 1
Gitt matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Regn ut, om mulig, summene $A+B$, $A+B^T$ og $A+C$ og produktene ABC og BA.

LF: Summene $A+B$ og $A+C$ eksisterer ikke. Det er slik fordi de to matrisene i hver av de to summene har ulik dimensjon. Den transponerte til B er lik

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T = \underline{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}$$

Summen $A+B^T$ er lik

$$A+B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}}$$

Produktet ABC eksisterer. I et forsøk på å spare arbeid ganger vi sammen B og C først og så ganger vi med A fra venstre.

$$ABC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1-4+4 \\ -3+2+16 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+30 \\ 2+15 \\ 0+45 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 29 \\ 17 \\ 45 \end{bmatrix}}$$

Produktet BA eksisterer og er lik

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4+0 & 2-2+3 \\ 3-2+0 & 6+1+12 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 19 \end{bmatrix}}$$

Oppgave 2

Vis at inversmatrisen til

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 6 & 5 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

er

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Bruk inversmatrisen til M for å finne løsningene til likningssystemet

$$\begin{aligned} 3x + 3y - 2z &= a \\ 6x + 5y - 4z &= 1 - a \\ -x - y + z &= b \end{aligned}$$

uttrykt ved parametrene a og b.

LF: Dette kan gjøres på forskjellig vis. Vi kan gange sammen M og M^{-1} og sjekke at vi får identitetsmatrisen (det er tilstrekkelig å gange med M^{-1} fra høyre. Hvis $MM^{-1} = \mathbf{1}$ da er også $M^{-1}M = \mathbf{1}$, siden matrisene er kvadratiske.) Vi velger å starte med en konkatenering av M og identitetsmatrisen av dimensjon 3×3 og utfører radoperasjoner til M blir omgjort til identitesmatrisen. Da er identitetsmatrisen vi startet med blitt omgjort til inversmatrisen til M.

$$[M|\mathbf{1}] = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi tar tre kopier av rad 3 (R3) og legger til rad 1 (R1) og seks kopier av rad 3 (R3) og legger til rad 2 (R2). Da får vi

$$[M|\mathbf{1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi snur nå fortegn på R3 og lar så R1 og R3 bytte plass.

$$[M|\mathbf{1}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi legger R3 til R1 og trekker fra to kopier av R3 fra R2

$$[M|\mathbf{1}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi legger nå R2 til R1 og snur deretter fortegnet til R2

$$[M|\mathbf{1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi har nå utført radoperasjoner som har gjort M om til identitetsmatrisen. De samme radoperasjonene på identitetsmatrisen gir inversmatrisen til M. Dette gir at

$$\underline{M^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}}$$

Likningssystemet er på formen

$$M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1-a \\ b \end{bmatrix}$$

Derfor er

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} a \\ 1-a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1-a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+1-a+2b \\ 2a+a-1+0 \\ a+0+3b \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1-2a+2b \\ 3a-1 \\ a+3b \end{bmatrix}}$$

Oppgave 3
Bestem alle polynomer $p(x)$ av grad 3 eller lavere som går gjennom de tre punktene

$$(-1,0) \quad (0,2) \quad (1,1)$$

LF: Polynomer av grad 3 eller lavere er på formen

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

for reelle tall a, b, c og d. Et slikt polynom går gjennom punktene '

$$(-1,0) \quad (0,2) \quad (1,1)$$

presis når $p(-1) = 0, p(0) = 2$ og $p(1) = 1$.

Dette gir følgende tre likninger i parametrene a, b, c og d

$$\begin{array}{lclcl} p(-1) & = & -a+b-c+d & = & 0 \\ p(-1) & = & d & = & 2 \\ p(1) & = & a+b+c+d & = & 1 \end{array}$$

Legger vi den første likningen til den tredje får vi at $2(b+d) = 1$ Den andre likninger gir at $d = 2$. Derfor må $b = -3/2$. Parameteren c er entydig bestemt av parameteren a som $c = (1/2) - a$. Polynomene er derfor på formen

$$\underline{p(x) = ax^3 - 3/2x^2 + ((1/2) - a)x + 2}$$

for reelle tall a.

Oppgave 4
Løs den komplekse likningen

$$1 + 3iz = \sqrt{3}z$$

og oppgi svaret eksakt både på kartesisk og på polar form.

LF: Vi samler ledd med en faktor z på venstre side av likhetstegnet

$$\sqrt{3}(1 - \sqrt{3}i)z = \sqrt{3}z - 3iz = 1$$

Deler vi med faktoren foran z får vi

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}(1-\sqrt{3}i)} = \frac{(1+\sqrt{3}i)}{\sqrt{3}|1-\sqrt{3}i|^2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{4\sqrt{3}}$$

hvor vi har ganget med den konjugerte $1+\sqrt{3}i$ til $1-\sqrt{3}i$ både i teller og nevner. Løsningen på kartesisk form er

$$z = \underline{\frac{1+\sqrt{3}i}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{i}{4}}$$

Vi finner nå løsningen på polar form. Siden $(1+\sqrt{3}i)/2$ har lengde 1 og vinkel $\pi/3$ radian (opp til et helt omløp) så er

$$z = \underline{\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} e^{\pi/3i}}$$

Her har vi benyttet Eulers formel til å skrive z på en form som får frem at absoluttverdien (lengden) til tallet er $1/(2\sqrt{3})$ og vinkelen er lik $\pi/3$ radian (opp til et helt omløp).

Oppgave 5

Vis at lengden langs grafen til funksjonen $f(x) = x^2/2$ fra punktet $(0,0)$ til $(2,2)$ er gitt ved

$$L = \int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Estimér L ved å bruke trapesmetoden med 4 delintervaller.

LF: Buelengden til grafen til en deriverbar funksjon $f(x)$ fra $x=a$ til $x=b$ er gitt ved

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

I vårt tilfelle er $a=0$ og $b=2$ og funksjonen er $f(x)=x^2/2$. Den deriverte er lik $f'(x) = 2x/2 = x$ så buelengden er lik

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Vi estimerer buelengden ved bruk av trapesmetoden med 4 delintervaller. Vi deler intervallen i fire like deler. Endepunktene er da $0, 1/2, 1, 3/2$ og 2. Intervallbredden er $d = 1/2$. Integranden er $g(x) = \sqrt{1+x^2}$.

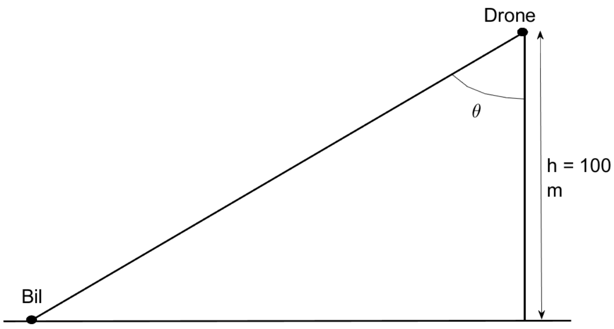
Estimatet er

$$d[g(0)/2+g(1/2)+g(1)+g(3/2)+g(2)/2] = d[1/2+\sqrt{5}/2+\sqrt{2}+\sqrt{13}/2+\sqrt{5}/2] =$$

$$d[1+\sqrt{5}+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{13}]/2 = (1+2\sqrt{5}+\sqrt{13}+2\sqrt{2})/4 = \underline{2.9765...}$$

(Et mer nøyaktig svar regnet ut med Simposons metode og flere intervaller er 2.9578857150891...)

Oppgave 6
En drone står stille i lufta i en høyde $h = 100$ meter over bakken. Dronen har et videokamera som følger en bil som kommer kjørende med konstant hastighet $v = 20$ meter per sekund langs en rett vei. Vinkelen mellom retningen til kameralinsa og den vertikale aksen kaller vi for θ (målt i radianer).



Hvor fort endrer vinkelen θ seg når bilen er rett under dronen?

LF: I det bilen passerer rett under dronen beveger den seg langs tangenten til en sirkelbane med radius $h = 100$ m. Endringsraten til buelengden til en slik sirkelbane er lik radius ganger vinkelhastighet (siden buelengden er radius ganget med vinkel og radien holdes konstant). Derfor er vinkelfarten i absoluttverdi

$$|\theta'(t)| = \frac{20m/s}{100m} = 0.2s^{-1}.$$

Fra figuren ser vi at vinkelen er avtagende derfor er endringsraten negativ så

$$\theta'(t) = \underline{-0.2s^{-1}}.$$

Alternativt: La avstanden fra punktet rett under være x. Anta bilen beveger seg rett mot dette punktet. Vi har følgende forhold mellom vinkelen θ og x

$$\tan(\theta(t)) = \frac{x(t)}{h}.$$

Deriverer vi dette med hensyn til tiden t får vi

$$(1 + \tan^2(\theta(t)))\theta'(t) = \frac{x'(t)}{h}.$$

Fra opplysningene og figuren ser vi at $x'(t) = -20m/s$. Dette gir

$$\theta'(t) = \frac{x'(t)}{h(1 + \tan^2(\theta(t)))}.$$

I det vinkelen er null grader får vi

$$\theta'(t) = \frac{x'(t)}{h(1+\tan^2(0))} = \frac{x'(t)}{h} = -0.2s^{-1}.$$

Oppgave 7
Petter kjører langs en rett strekning i tre minutter. Han starter ved posisjon $s_0 = 400$ meter. Fartsfunksjonen er gitt ved

$$v(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq 10 \\ 20 & 10 \leq t \leq 160 \\ 180 - t & 160 \leq t \leq 180 \end{cases}$$

Farten har enhet meter per sekund og tiden t har enhet sekund.

Hvor på den rette strekningen ender Petter opp etter kjøreturen?

LF: Petter ender opp i posisjon

$$s_0 + \int_0^{180} v(t)\,\mathrm{d}t$$

langs den rette strekningen han kjører på. Integralet er mest naturlig å dele i tre integraler, ett for hvert av uttrykkene som forekommer i funksjonen definert ved delt forskrift.

$$\int_0^{180} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{10} 2t\,\mathrm{d}t + \int_{10}^{160} 20\,\mathrm{d}t + \int_{160}^{180} 180 - t\,\mathrm{d}t$$

Vi kan nå evaluere integralene ved å finne antideriverte etc. I vårt tilfellet kan vi godt gjøre det enda enklere. Grafen til første og siste invervall er rette linjestykker som har et endepunkt på t-aksen. Områdene de avgrenser er derfor trekanter. Arealet (med fortegn) er derfor lik bredde gange høyde delt på to. Grafen til funksjonen i det midterste intervallet er konstant, så området avgrenset av funksjonen er et rektangel. Arealet er høyde ganget med bredde. Derfor er integralet lik

$$\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (10 + 20) + 20 \cdot 150 = 3300$$

med enheter meter.

Posisjonen til Petter etter kjøreturen er derfor $3300 + 400 = \underline{3700}$ meter.

Oppgave 8
Løs initialverdiproblemet

$$(3-2x)y' = 1+y$$

hvor $y(1) = 2$.

LF: Dette er en separabel differensiallikning. Vi deler med $1+y$ og med $3-2x$ på begge sider av likhetstegnet. (Gyldig når $y \neq -1$ og $x \neq 3/2$.) Vi integreer med hensyn til x på begge sider og benytter substitusjon

$$\int \frac{1}{1+y} y' \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3-2x} \,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{1+y} \,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{3-2x} \,\mathrm{d}x$$

Vi finner antideriverte (benytter en lineær substitusjon) og får

$$\ln|1+y| = \frac{1}{-2} \ln|3-2x| + C = \ln(|3-2x|^{-1/2}) + C$$

Siden eksponentialfunksjonen er en økende funksjon er de to uttrykkenen like presis når uttrykkenene vi får ved å anvende eksponentialfunksjonen e^x på dem er like.

$$|1+y| = e^C \cdot |3-2x|^{-1/2}$$

Derfor må

$$1+y = e^C \cdot |3-2x|^{-1/2}$$

eller

$$1+y = -e^C \cdot |3-2x|^{-1/2}$$

Konstanten e^C kan ta alle positive reelle verdier. Vi har også at løsningen y identisk lik -1, som er løsningen til $1+y=0$, er en løsning til differensiallikningen. Dette gir

$$1+y = K \cdot \frac{1}{\sqrt{|3-2x|}}$$

for alle reelle K.

Vi setter nå inn initialkravet og bestemmer konstanten K.

$$1+y(1) = 1+2 = K \cdot \frac{1}{\sqrt{|3-2\cdot 1|}} = K$$

Derfor er $K = 3$ og løsningen er

$$y(x) = \underline{\frac{3}{\sqrt{|3-2x|}}} - 1$$

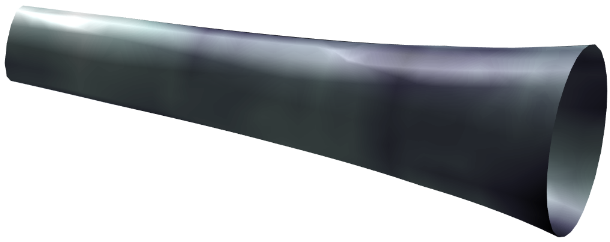
for $x \neq 3/2$.

Oppgave 9
Trine har dreid et trestykke i en dreiebenk (se figur). Stykket er 30 centimeter langt og radien er gitt ved funksjonen

$$r(x) = \frac{100}{50 - x}$$

for $0 \leq x \leq 30$. Både x og radien r er oppgitt i centimeter.

Regn ut volumet til trestykket og oppgi svaret i liter.



LF: Trestykket kan beskrives som et omdreiningslegeme. Vi får at volumet er gitt som integralet av tverrsnittarealene langs lengderetningen til legemet. Dette er lik

$$V = \int_0^{30} \pi r^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{30} \frac{100^2}{(50-x)^2}\,\mathrm{d}x = \pi 10^4 \frac{1}{50-x}\Big|_0^{30}$$

Her har vi benyttet at den antideriverte til x^{-2} er lik $-x^{-1}$ og en lineær substitusjon $u(x) = 50 - x$. Vi setter inn verdiene og finner at

$$V = \pi 10^4 \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{50}\right) = \pi 10^4 \left(\frac{5}{100} - \frac{2}{100}\right) = \pi 300$$

med enheter kubikkcentimeter. Én liter er én kubikkdesimeter, og én desimter er 10 centimeter. Derfor er en liter lik 1000 kubikkcentimeter. Volumet er lik $3\pi/10 \simeq \underline{0.942 \text{ liter}}$.

Oppgave 10
Bestem alle løsningene til den homogene differensiallikningen

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Finn så alle løsninger til den inhomogene differensiallikningen

$$y'' - 6y' + 9y = 13\cos(2x).$$

LF: Vi forsøker med løsninger på formen e^{rx}. Setter vi funksjonen inn i differensiallikningen får vi

$$(r^2 - 6r + 9)e^{rx} = (r-3)^2 e^{rx} = 0$$

(for alle x). Dette gir en løsning presis når $r = 3$. Her er det en dobbel rot så da er også $x \cdot e^{3x}$ en løsning. Lineære kombinasjoner av homogene løsninger er igjen en homogen løsning. Derfor er $\underline{y_h = Ae^{3x} + Bxe^{3x}}$ homogene løsninger for alle A og B. Dette er alle de homogene løsningene. (Vi har at $y(0) = A$ og $y'(0) = 3A + B$. En homogen løsning er entydig bestemt av verdiene til y og dens deriverte i 0 (eller et annet punkt).)

Vi finner nå en partikulær løsning. Funksjonen $\cos(2x)$ er ikke en homogen løsning. Derfor forventer vi en partikulær løsning på formen

$$y_p = a\cos(2x) + b\sin(2x).$$

Vi kan derivere denne funksjonen et par ganger og sette resultatene inn i differensiallikningen. Fra likningene vi får kan vi løse for a og b. Vi velger her en annen metode. Vi har at $13\cos(2x)$ er realdelen til

$$13e^{2ix} = 13(\cos(2x) + i\sin(2x))$$

ved Eulers formel. Fremgangsmåten er som følger: Vi finner en løsning til differensiallikningen

$$y'' - 6y' + 9y = 13e^{2ix}.$$

Realdelen av en slik løsning er en partikulær løsning til vår opprinnelige differensiallikning. Vi prøve med Ke^{2ix}. Vi deriverer én og to ganger og setter inn i

$$y'' - 6y' + 9y = 13e^{2ix}.$$

Vi får

$$((2i)^2 - 6(2i) + 9)Ke^{2ix} = 13e^{2ix}$$

Dette gir en likhet presis når

$$K = \frac{13}{-4 - 12i + 9} = \frac{13}{5 - 12i} = \frac{13(5+12i)}{5^2 + 12^2} = \frac{13(5+12i)}{13^2} = \frac{5+12i}{13}$$

Her har vi benyttet at $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$ (så $5, 12, 13$ er et Pytagoreisk trippel). En partikulær løsning er derfor gitt som realdelen

$$y_p = \mathrm{Re}(Ke^{2ix}) =$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{5+12i}{13}(\cos(2x) + i\sin(2x))\right) = (5\cos(2x) - 12\sin(2x))/13.$$

Løsningene til den inhomogene differensiallikningen er derfor lik $y_p + y_h$

$$y(x) = \underline{(5\cos(2x) - 12\sin(2x))/13 + Ae^{3x} + Bxe^{3x}}.$$