Alle svar skal grunngis. Alle deloppgaver har lik vekt.

Oppgave 1
Vi definerer matrisene A, B, og C som

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Regn ut følgende matrisesummer og matriseprodukter, om mulig. Dersom det ikke er mulig skal du kort forklare hvorfor.

$$A + B, \quad AB, \quad CB, \quad A + C^T.$$

Matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 13 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

er rekke-ekvivalent med matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

som er på trappeform (men ikke på *redusert* trappeform). M er totalmatrisen (også kalt *den utvidede matrisen*, på engelsk *the augmented matrix*) til et likningssystem med ukjente x_1, x_2 og x_3.

b) Regn ut løsningen til dette likningssystemet.

Vi ser nå på likningssystemet $M\vec{x} = \vec{0}$ med

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Én løsning er $\vec{x} = \vec{0}$, men likningssystemet har flere løsninger.

c) Beskriv *alle* løsningene til likningssystemet $M\vec{x} = \vec{0}$.

Oppgave 2

a) Løs den komplekse likningen

$$z^2 + 2z + 2 = 0.$$

Oppgi svaret både på kartesisk og polar form.

b) Bestem løsningen til initialverdiproblemet

$$y'' + 2y' + 2y = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Oppgave 3

Vis at punktet $(1, 2)$ ligger på kurven definert ved

$$\sqrt{x^3} - x^2 y + (y-1)^4 = 0.$$

Bestem likningen til tangenten til kurven i $(1, 2)$.

Oppgave 4

a) Forklar hvorfor funksjonen

$$f(x) = \ln(x^2) - 1/x$$

har akkurat ett nullpunkt på intervallet $[1, 2]$.

b) Benytt Newtons metode med startverdi $x_0 = 1$ og tre iterasjoner til å estimere nullpunktet.

Oppgave 5

Dersom grafen til $y = \sin(x)$ mellom $x = 0$ og $x = \pi/2$ roteres om y-aksen dannes en vaselignende beholder.

Regn ut volumet til denne beholderen.

Oppgave 6

a) Bruk trapesmetoden med $n = 4$ og $n = 5$ ($n =$ antall delintervaller) til å regne ut tilnærmede verdier for det bestemte integralet

$$\int_{-1}^{1} |1 - x| \, dx.$$

b) Regn ut den eksakte verdien til integralet.

Hvorfor er trapesmetoden med $n = 4$ mer nøyaktig enn med $n = 5$ for dette integralet?

Oppgave 7

En svært smittsom sykdom herjer i ei bygd med 1000 mennesker. Antall smittede innbyggere $S(t)$ ved tida t (målt i dager) kan beskrives ved differensiallikningen

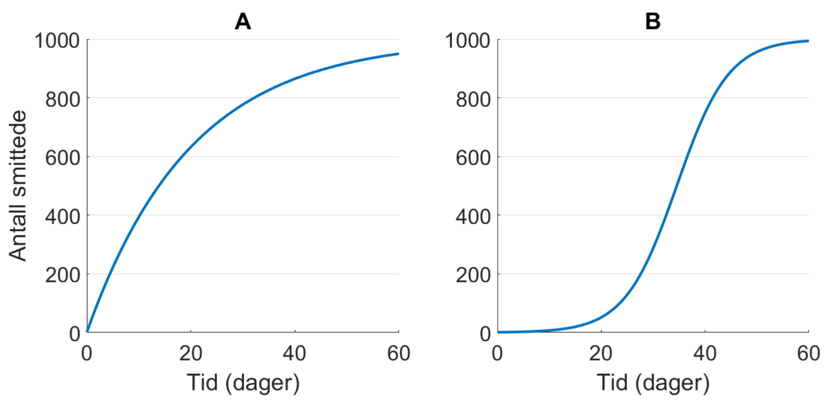
$$S' = 0.0002S\,(1000 - S)\,.$$

Hvor mange blir smittet per dag når $S = 100$?

Hvor mange av bygdas innbyggere er smittet når S vokser raskest?

Hvilken av figurene under viser en løsningskurve til differensiallikningen?

(Du trenger ikke løse differensiallikningen for å kunne svare på spørsmålene i oppgaven).



SLUTT