Prøve i Matte 1000 ELFE KJFE MAFE 1000
Dato: 03. mars 2016
Hjelpemiddel: Kalkulator og formelark

Alle svar skal grunngis. Alle deloppgaver har lik vekt.

Oppgave 1
Gitt matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Regn ut, om mulig, den transponerte B^T til B, produktene AB og BA samt determinanten $\det(A^7)$ til A^7.

Oppgave 2
Bestem inversmatrisen til matrisen

$$M = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Oppgave 3
Bestem alle løsningene til likningssystemet som har total matrise (utvida koeffisientmatrise) ekvivalent til

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

La de fire variablene være henholdsvis x_1, x_2, x_3 og x_4.

Oppgave 4
En lineær transformasjon T fra $\mathbb{R}^2$ til seg selv har egenskapen at

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Bestem standardmatrisen til denne lineære transformasjonen.

Oppgave 5

a) Løs den lineære likningen

$$2z + \sqrt{3} = 2iz + i$$

med hensyn på z. Skriv løsningen på polarform, $re^{i\theta}$.

b) Finn alle løsningene til likningen

$$z\bar{z} - 2iz - 3 = 0$$

Oppgave 6

Regn ut den eksakte verdien til de bestemte integralene.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{(2x+1)^3}}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{4x}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{4}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$

Oppgave 7

Bestem koordinatene til punktene på grafen til $y = x^2$ som er nærmest punktet $(0, 3)$ på y-aksen.

Oppgave 8

Vi skal undersøke nullpunkt til funksjonen

$$g(x) = \ln(x) - \frac{1}{x}$$

a) Forklar hvorfor $g(x)$ har akkurat ett nullpunkt i intervallet $[1, 2]$.

b) Benytt Newtons metode til å finne en tilnærmet verdi for dette nullpunktet i $[1, 2]$. La startverdien være 1 og utfør to iterasjoner.

Oppgave 9

La D være regionen i xy-planet avgrenset av x-aksen, grafen til $y(x) = 2e^x$, for x mellom 0 og 3, og linjene $x = 0$ og $x = 3$. Bestem volumet til rotasjonslegemet som fremkommer ved å rotere regionen D om y-aksen.

Oppgave 10

Hva gjør følgende ukommenterte skript hvis det kjøres i matlab?
Hva estimeres?

```
a=1;
b=3;
N=20;
d=(b-a)/N;
f=@(x) sin(x)/x;

X=a:d:b;
Y=zeros(1,N+1);
T=0;
Y(1) = f(a);
for i=1:N
    a = a + d;
    Y(i+1) = f(a);
    T = T + Y(i) + Y(i+1);
end

T*d/2

plot(X,Y)
```

Oppgave 11

Benytt numerisk integrasjon til å estimere det bestemte integralet

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\ \mathrm{d}x$$

Benytt trapesmetoden med tre delintervaller.

Oppgave 12
Finn Taylorpolynomet om $x = 0$ til funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + 2 - x + 4x^5$$

til og med grad 4.

Oppgave 13

Finn en likning som beskriver tangentlinjen til kurven gitt ved likningen

$$x^2 + 4y^2 = 5^2$$

(en ellipse) i punktet $(3, -2)$.

Oppgave 14
Torricellis lov sier at høyden h til væsken i en beholder med tverrsnittareal-funksjon $A(h)$ er styrt av følgende differensiallikning

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{a}{A(h)}\sqrt{2gh}$$

hvor g er gravitasjonskonstanten og a er arealet til åpningen i bunnen av beholderen.

a) Bestem høyden som en funksjon av tiden når beholderen er en sylinder med høyde H og konstant radius R. Ved tiden $t = 0$ er sylinderen helt full. Hvor lang tid tar det før alt vannet renner ut?

b) Bestem tverrsnittarealfunksjonene $A(h)$ som gjør at vannet renner ut slik at endringsraten til høyden blir konstant.

Oppgave 15
Finn alle løsningene til differensiallikningen

$$y''(x) + y(x) = \sin(x).$$