NY/UTSATT EKSAMEN i Ma1000 for Kjemi/Maskin, 26.02.15

OPPGAVE 1

a) Bestem grenseverdiene $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x+1)}{\tan x}$ og $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin(x^2)}$.

b) Finn $y' = \frac{dy}{dx}$ for hver av funksjonene

$$\text{i)}\quad y = x\cdot\sqrt{x} + \frac{1}{x} \quad\text{and}\quad \text{ii)}\quad y = 2x\arcsin\frac{1}{x}\ .$$

OPPGAVE 2

En funksjonen $y = f(x)$ er gitt ved:

$$y = 2\sin(2x)\,,\quad 0 \le x \le \pi/2.$$

Grafen til $f(x)$ og x-aksen avgrenser en flate F i 1. kvadrant.

a) Når F roterer om y-aksen, får vi et omdreiningslegeme med volum V_y. Finn V_y.

b) Når F roterer om x-aksen, får vi et omdreiningslegeme med volum V_x. Finn V_x.

OPPGAVE 3

a) Hvilken algoritme/metode er implementert i skriptet nedenfor? Og hvilket konkret problem forsøker skriptet å estimere løsningen av?

```
x1=0;  % startverdi x1, en skalar
x=1;
while abs(x1-x)>1e-6
    x=x1;
    y=2*exp(2*x)+2*x;
    Dy=4*exp(2*x)+2;
    x1=x-y/Dy;
end
x=x1
```

(Når vi kjører skriptet i MATLAB, får vi svaret $x = -0.4263$)

b) En funksjonen er gitt ved: $f(x) = e^{2x} + x^2$, $-2 \le x \le 1$. Finn det globale (dvs. absolutte) minimumspunktet til f (angi x og y-verdien med 3 desimaler).

OPPGAVE 4

a) Disse to matrisene

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad\text{og}\quad C = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

er gitt. Finn B^{-1} og bruk dette til å finne ei 2×2 matrise X slik at $XB = C$.

(Vi oppgir svaret: $X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ fordi du kanskje kan få bruk for matrisa X i b).)

b) Om transformasjonen T fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}^2$ vet vi at den er lineær og at

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} .$$

Bestem standardmatrisa til T.

OPPGAVE 5

Finn den generelle løsningen av differensiallikningene

a) $2y' + 3x^2y^3 = y^3$.

b) $4y'' + 9y = 5\sin t + 10\cos t$.

OPPGAVE 6

Følgende matriser og vektorer er gitt:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -a \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 4 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} b-1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

der $\vec{x}$ er en vektor av ukjente og a, b er parametere.

a) Regn ut $\frac{1}{2}B$ og BA. La $a = 2$ og sjekk at $BA = 2I$ der I er identitetsmatrisa. Hva kan du si om $\frac{1}{2}B$ ut fra denne regningen?

b) For alle $a, b \in \mathbb{R}$, finn først ut når ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{c}$ har

i) nøyaktig en løsning , ii) uendelig mange løsninger , iii) ingen løsning.

Finn så den generelle løsningen når ligningssystemet har uendelig mange løsninger.

OPPGAVE 7

En funksjon $y = f(x)$ er (i et intervall om $x = 2$) implisitt gitt ved:

$$y^3 - xy + 1 = 0 , \qquad f(2) = 1 .$$

a) Finn tangentens ligning i $(2, 1)$.

b) Finn Taylorpolynomet til $f(x)$ av orden 2 om $x = 2$. Vender grafen til $y = f(x)$ den hule siden opp eller ned i punktet $(2, 1)$?

Oppgave 8

I en 10 minutters periode kjører en bil med en fart $v = v(t)$ som oppfyller

$$v(t) = 70 + 120t \quad , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{6}$$

der t måles i timer og $v(t)$ i km/time.

a) Finn hvor langt bilen kjører i denne perioden og finn gjennomsnittsfarten.

Bilens bensinforbruk, $b(v)$, målt i liter per mil, varierer med farten og er, når v er som i a), gitt ved

$$b(v) = \frac{v^2}{10000} \, .$$

b) Forklar hvorfor bensinforbruket i liter i et meget lite tidsintervall $[t, t+\Delta t]$ er tilnærmet gitt ved

$$\frac{1}{10} \cdot b(v) \cdot v \cdot \Delta t \, .$$

Bestem bensinforbruket for hele 10 minuttersperioden.

c) Vi tenker oss nå at farten v ikke er gitt ved formelen i a), men at en isteden har målt farten ved tiden $t = 0$ og for hvert 10. sekund i hele 10 minuttersperioden, dvs. at man har gjort 61 målinger av farten (i km/time) og at måleresultatene er $v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{60}$ ved tidspunktene $0, 10, 20, 30, \ldots, 600$ (målt i sekunder). Hva blir bensinforbruket tilnærmet lik i hele 10 minuttersperioden uttrykt ved v_i-ene dersom formelen for $b(v)$ fortsatt gjelder? Skriv også et skript i MATLAB som beregner dette bensinforbruket ved å bruke måleresultatene $v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{60}$.

Løsningsforslag

Oppg. 1 a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2x+1)}{\tan x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2x+1}\cdot 2}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \underline{\underline{2}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin(x^2)} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos(x^2)\cdot 2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim \frac{1}{\cos^2 x} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

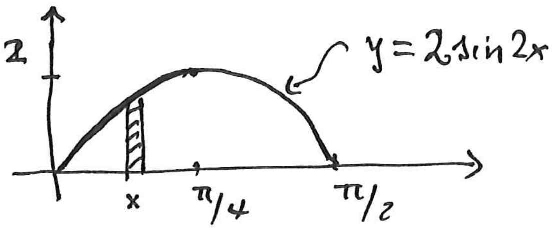
b) i) $y = x\cdot x^{1/2} + \frac{1}{x} = x^{3/2} + x^{-1} \Rightarrow y' = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} + (-1)x^{-2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}}}$

ii) $y = 2x\cdot \arcsin\frac{1}{x} \Rightarrow y' = 2\cdot\arcsin\frac{1}{x} + 2x\cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow$

$$y' = \underline{\underline{2\arcsin\frac{1}{x} - \frac{2}{x\cdot\sqrt{1-1/x^2}}}} = \underline{\underline{2\arcsin\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x^2-1}}}}$$

når $x>0$

Oppg. 2



a) $dV_y = 2\pi\,\text{rad}\cdot\text{høyde}\cdot dx$

$V_y = 2\pi \int_0^{\pi/2} x\, 2\sin 2x\, dx =$ (int.)

$2\pi\left[x\cdot(-\cos 2x) + \int \cos 2x \cdot 1\, dx\right]_0^{\pi/2}$

$$V_y = 2\pi\left[-x\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2} = 2\pi\left(-\frac{\pi}{2}(-1) + \frac{1}{2}\cdot 0\right) = \underline{\underline{\pi^2}}$$

b) $dV_x = \pi\,\text{rad}^2\cdot dx = \pi y^2\, dx$

$$V_x = \pi\int_0^{\pi/2} 4\sin^2 2x\, dx = \pi\int_0^{\pi/2} 4\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}\, dx = 2\pi\left[x - \frac{\sin 4x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\pi^2}}$$

Oppg. 3 a) Her er Newtons metode implementert. Dette er en metode for å løse $f(x) = 0$. Hvis x_1 er en tilnærmet løsning, så fås "bedre" løsninger $x_2, x_3, \ldots, x_n$ ved å bruke

$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. I skriptet er $f(x) = 2e^{2x} + 2x$ og

$f'(x) = 2\cdot 2e^{2x} + 2$

While-løkka stopper når $|x_{n+1} - x_n| \leq 10^{-6}$ og skriver så ut verdien $x := x_{n+1}$, som er $x = -0.4263$ med 4 desimaler.

b) $f(x) = e^{2x} + x^2$, $-2 \leq x \leq 1$

Minimum = ? $\qquad f'(x) = 2e^{2x} + 2x$

$f'(x) = 0 \iff 2e^{2x} + 2x = 0$, Får $\underline{x = -0.4263}$ en løsning fra a)

Da $f''(x) = 4e^{2x} + 2 > 0$ så må grafen vende hul side opp $\Rightarrow f'(x)$ er voksende i def. området

$\Rightarrow x = -0.4263$ gir absolutt minimum for f

$f(-0.4263) = 0.6080$. Min. punktet er: $\underline{\underline{(-0.426, 0.608)}}$

Oppg. 4

a) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{3 - 2 \cdot 2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}}$

Får $XB = C \Rightarrow X = CB^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}}$

b) Standardmatrisa A oppfyller $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Gitt at

$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $A \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}$. Per def. av matrisemult. får vi da

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

. Dette er problemet vi løste i a)

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}}$$

Oppg. 5

a) $$2y' + 3x^2y^3 = y^3 \iff$$

$$2y' = y^3 - 3x^2y^3 = y^3(1-3x^2) \quad \text{Får :}$$

$$\frac{2y'}{y^3} = 1-3x^2$$. Diff. ligm. er separabel!

$$\iff \int 2\cdot\frac{y'}{y^3}dx = \int(1-3x^2)dx \iff \int 2y^{-3}dy = x - x^3 + C$$

$$\iff 2\cdot\frac{1}{-2}y^{-2} = x - x^3 + C \iff -\frac{1}{y^2} = x - x^3 + C$$

$$\iff -\frac{y^2}{1} = \frac{1}{x-x^3+C}$$. Gen. løsn: $\underline{\underline{y = \frac{1}{\sqrt{x^3-x+C}}}}$

b) $$4y'' + 9y = 5\sin t + 10\cos t$$

$4y'' + 9y = 0$. Kar. ligm. $4r^2+9=0$. Rotter $r = \pm\frac{3}{2}i$

En løsn. $e^{i\frac{3}{2}t} = \cos\left(\frac{3t}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3t}{2}\right)$. Realdel

og imaginærdel er løsninger $\Rightarrow$

$y_h = c_1\cos\left(\frac{3t}{2}\right) + c_2\sin\left(\frac{3t}{2}\right)$ gen. løsn. av $4y''+9y=0$

Partikulær løsning : $y_p = a\sin t + b\cos t$

$y_p'' = -a\sin t - b\cos t$

innsatt

$4y_p'' + 9y_p = 5\sin t + 10\cos t$ Får

$$4a\sin t + 4b\cos t - 9a\sin t - 9b\cos t = 5\sin t + 10\cos t$$

$$-5a\sin t - 5b\cos t = 5\sin t + 10\cos t$$

Dette stemmer hvis vi velger $a=-1$ og $b=-2$

Gen. løsn. $y = y_h + y_p = \underline{\underline{c_1\cos\left(\frac{3t}{2}\right) + c_2\sin\left(\frac{3t}{2}\right) - \sin t - 2\cos t}}$

Oppg. 6 a)
$$\tfrac{1}{2}B = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 4 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1/2 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}}}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 4 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -a \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & a \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2a-4 \\ 0 & 2 & 2a-4 \\ 0 & 0 & 2a-2 \end{bmatrix}}}$$

Når $a = 2$, så: $BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{2I}}$

Da må $\tfrac{1}{2}B = A^{-1}$ = den inverse til A fordi:

$BA = 2I \Rightarrow (\tfrac{1}{2}B)A = I$ så $\underline{\underline{A^{-1} = \tfrac{1}{2}B}}$ (eller gang med A^{-1} til venstre)

b)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -a & b-1 \\ 3 & -5 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & a & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 3 \\ 3 & -5 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -a & b-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 3 \\ 0 & 1 & 2-3a & -2 \\ 0 & 1 & -a & b-1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 3 \\ 0 & 1 & 2-3a & -2 \\ 0 & 0 & -2+2a & b+1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Nøyaktig én løsn. når $-2+2a \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{a \neq 1}}$

Uendelig mange løsn. når
$-2+2a = 0,\ b+1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = 1,\ b = -1}}$

Ingen løsn. når
$-2+2a = 0,\ b+1 \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = 1,\ b \neq -1}}$

Gen. løsn. når
$a = 1,\ b = -1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ligm. system er ekvivalent med
$$x_1 - x_3 = -1$$
$$x_2 - x_3 = -2$$

Gen. løsn. $\underline{\underline{\begin{array}{l} x_1 = x_3 - 1 \\ x_2 = x_3 - 2 \end{array}}}$, x_3 fri variabel

Gen. løsn. på vektorform
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 - 1 \\ x_3 - 2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{x_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Oppg. 7 a) $y^3 - xy + 1 = 0$. Deriverer mht x

$$3y^2y' - (y + xy') = 0 \iff 3y^2y' - xy' = y \iff y' = \frac{y}{3y^2 - x}$$

For $x = 2$, $y = 1$, så er

$$3y' - (1 + 2y') = 0 \iff y' = 1 \quad \text{, dvs. } f'(2) = 1$$

Tangentens ligm. $\quad y - 1 = 1 \cdot (x-2) \iff \underline{\underline{y = x - 1}}$

b) Deriverer $3y^2y' - y - xy' = 0$ mht x:

$$3 \cdot 2yy' \cdot y' + 3y^2 \cdot y'' - y' - (1 \cdot y' + xy'') = 0$$

Når $x = 2$, $y = 1$, $y' = +1$, så er

$$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + 3y'' - 1 - 1 - 2y'' = 0 \iff \underline{y'' = -4} \text{ , dvs } f''(2) = -4$$

Taylorpoly. av orden 2 om $x = 2$:

$$f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 = 1 + \frac{1}{1!}(x-2) + \frac{-4}{2!}(x-2)^2 =$$

$$\underline{\underline{1 + (x-2) - 2(x-2)^2}}$$

Da $y'' = f''(2) = -4 < 0$, så vender grafen <u>hul side ned</u>.

Oppg. 8 $\quad v(t) = 70 + 120t \quad , \quad 0 \le t \le 1/6$

a) Tilbakelagt vei : $\quad s = \int_0^{1/6} (70 + 120t)\,dt = \left[70 \cdot t + 60t^2\right]_0^{1/6} = \frac{70}{6} + \frac{10}{6}$

$$= \frac{40}{3} \approx \underline{\underline{33.3}} \text{(km)}$$

Gjennomsnittsfart

$$\bar{v} = \frac{1}{1/6} \int_0^{1/6} v(t)\,dt = 6 \cdot \frac{40}{3} = \underline{\underline{80}} \text{ (km/time)}$$

b) Bensinforbruket, målt i liter per km, er $\quad \frac{1}{10} \cdot b(v) = \frac{b(v)}{10}$

Bensinforbruket over en meget liten veistrekning $\Delta s = v(t)\Delta t$ (målt i km) er :

$$\frac{b(v)}{10} \Delta s = \underline{\underline{\frac{b(v)}{10} v \Delta t}} \quad \left(\text{benevning } \frac{\ell}{\text{km}} \cdot \frac{\text{km}}{\text{time}} \cdot \text{time}\right)$$

Pr. def. av bestemt integral, så er bensinforbruket over hele 10 min. perioden lik

$$\int_0^{t=1/6} \frac{1}{10} b(v)\, v\, dt = \frac{1}{10}\int_0^{t=\frac{1}{6}} \frac{v^2}{10^4}\cdot v\, dt = \frac{1}{10^5}\int_0^{t=1/6} v^3 dt =$$

$$\frac{1}{10^5}\int_0^{1/6} (70+120t)^3 dt = \left[\frac{1}{10^5}\cdot\frac{1}{120}\cdot\frac{1}{4}(70+120t)^4\right]_0^{1/6}$$

$$= \frac{1}{48}\cdot\frac{1}{10^6}(90^4-70^4) = \frac{13}{15} \approx \underline{\underline{0{,}87\ (\ell)}}$$

c) Selv om $v = v(t)$ ikke er kjent, så er regningen i b) riktig helt fram til vi setter inn hva $v(t)$ er, dvs. bensinforbruket over 10 min. perioden er $\frac{1}{10^5}\int_0^{t=1/6} v^3 dt$. Bruker trapesmetoden og deler intervallet $[0,\frac{1}{6}]$ i $n = 60$ deler (fordi integranden er gitt i de 60 delepunktene: $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{10}{3600} = \frac{1}{360}$, $t_2 = \frac{2}{360}, \ldots, t_{60} = \frac{60}{360}$ der $t_{60} = \frac{1}{6}$). Får, med $h = \frac{1/6 - 0}{60} = \frac{1}{360}$ og $f(t) = \frac{v^3}{10^6}$ at

$$\int_0^{1/6} f(t)dt = \frac{h}{2}\left(f(0)+f(t_{60}) + 2\sum_{i=1}^{59} f(t_i)\right) = \underline{\underline{\frac{10^{-6}}{720}\left(v_0^3 + v_{60}^3 + 2\sum_{i=1}^{59} v_i^3\right)}}$$

<u>Skript</u> (Matlab)

```
h = (1/6)/60; % delintervallenes lengde
% leser inn vi = v_i for i=0,...,60 der v_i er målt fart ved t=t_i
S = h*(v0^3 + v60^3)/(2*10^6);
for i = 1:59
  t = h*i;
  S = S + h*vi^3/10^6;
end
S
```