EKSAMEN Ma1000 for Kjemi/Maskin 9.12.2014.

OPPGAVE 1

a) Bestem grenseverdiene $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^{2x}-1}$ og $\lim_{x\to 1} \cot(x-1)\cdot \ln x$.

b) Finn $y' = \frac{dy}{dx}$ for hver av funksjonene $y = \frac{\cos(x^2)}{x}$ og $y = 2\arctan\sqrt{x}$.

OPPGAVE 2

En funksjonen er gitt ved:

$$f(x) = 4\sin^3 x \cos x, \quad 0 \le x \le \pi/2 .$$

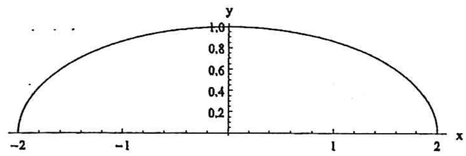
a) Finn alle globale maksimums- og minimumspunktene til $f(x)$.

b) Grafen til $f(x)$ og x-aksen avgrenser en flate F i 1. kvadrant. Finn arealet av F.

OPPGAVE 3

En funksjon $y = f(x)$ er implisitt gitt ved:

$$x^2 + 4y^2 = 4, \quad -2 \le x \le 2\ , \quad y \ge 0.$$



Grafen til $f(x)$, som vi kaller K, er tegnet i diagrammet til høyre.

a) Når flaten avgrenset av K og x-aksen roterer om x-aksen, får vi et omdreiningslegeme med volum V_x. Finn V_x.

b) Et rektangel har hjørner i punktene (x, y) og $(-x, y)$ på K og i $(x, 0)$ og $(-x, 0)$ på x-aksen der $x \ge 0$. Finn (x, y) slik at rektangelets areal blir størst mulig.

OPPGAVE 4

a) Hvilken algoritme/metode er implementert i skriptet nedenfor? Og hvilket konkret problem forsøker skriptet å estimere løsninga av?

```
h=(b-a)/n;  % må angi a,b og n før skriptet kjøres
S=(a*exp(2*a-1) + b*exp(2*b-1))*h/2;
for i=1:n-1
    x=a+h*i;
    S=S+x*exp(2*x-1)*h;
end
S
```

b) Hvilken verdi vil S nærme seg mot dersom skriptet kjøres med $a = 0$, $b = 1$ og stadig høyere verdier av n?

OPPGAVE 5

Vi betrakter matrisa A og vektorene $\vec{b}$, $\vec{c}$ og $\vec{x}$ gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

der a er en parameter og $\vec{x}$ en vektor av ukjente.

a) La først $a = 3$. Finn A^{-1} og løs ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ i dette tilfellet.

b) Bestem a slik at søylevektorene i A er lineært avhengige. Løs ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{c}$ i dette tilfellet og skriv den generelle løsningen på vektorform.

OPPGAVE 6

Løs initialverdiproblemet

$$y' \cdot \sqrt{1 - x^2} + y = 1 , \qquad y(0) = 2 .$$

Lag til slutt et skript (i MATLAB) som bruker en tilnærmingsmetode for å plotte grafen til funksjonen som løser initialverdiproblemet i intervallet $0 \leq x \leq 1$.

OPPGAVE 7

Finn den generelle løsningen av differensialligningen

$$4y'' + 4y' + 10y = 36e^{-2x} .$$

OPPGAVE 8

Følgende matriser og vektorer er gitt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & t^2 - t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2t + 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

der $\vec{x}$ er en vektor av ukjente og t er en parameter. Dersom noe av det vi ber deg regne ut ikke er definert, skal du kort forklare hvorfor.

a) Regn ut $3B$, $2A - 3B$, AB og BA.

b) For alle $t \in \mathbb{R}$ skal vi nå drøfte ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{c}$. Ved for eksempel å omforme totalmatrisa til $A\vec{x} = \vec{c}$ til ei radekvivalent matrise på trappeform skal du avgjøre når $A\vec{x} = \vec{c}$ har

i) nøyaktig en løsning   ii) uendelig mange løsninger   iii) ingen løsning.

c) Finn $\det(A)$. For hvilke verdier av t er matrisa A invertibel? Sammenlign svaret med det du fant i b).

OPPGAVE 9

En 10 m lang stige står lent mot en vertikal husvegg. Stigens nedre ende begynner å skli horisontalt med konstant fart $\frac{1}{3}$ m/s. Finn farten som stigens øvre ende har nedover langs husveggen i det øyeblikk stigens nedre ende er 6 m fra husveggen.

LØSNINGSFORSLAG

Oppg. 1

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^{2x}-1} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2e^{2x}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$\lim_{x\to 1} \cot(x-1)\cdot \ln x = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\tan(x-1)} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\cos^2(x-1)}} = \underline{\underline{1}}$$

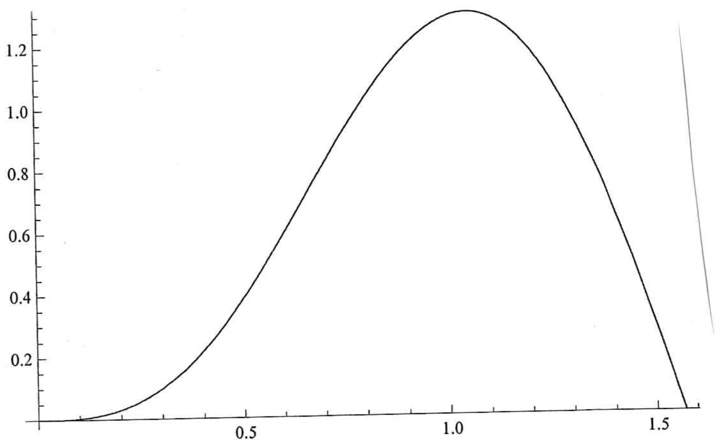
b) $$y = \frac{\cos(x^2)}{x} \Rightarrow y' = \frac{-\sin(x^2)\cdot 2x\cdot x - \cos(x^2)\cdot 1}{x^2}$$

Får $$y' = \underline{\underline{\frac{-2x^2\sin(x^2) - \cos(x^2)}{x^2}}}$$

$y = 2\arctan\sqrt{x} = 2\arctan u$ der $u = \sqrt{x}$

$$y' = 2\cdot\frac{1}{1+u^2}\cdot u' = \frac{2}{1+\sqrt{x}^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}}}$$

Oppg 2



a) $y = 4\sin^3 x\cos x \,,\; 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

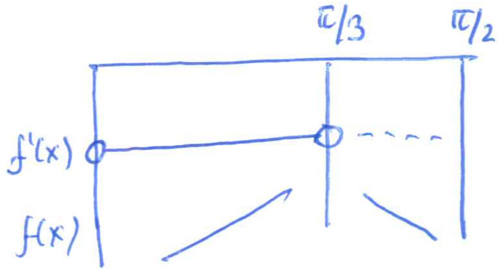
$y' = 4\cdot 3\sin^2 x\cos^2 x + 4\sin^3 x(-\sin x)$

$y' = 4\sin^2 x(3\cos^2 x - \sin^2 x)$

$y' = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ og

$3\cos^2 x = \sin^2 x \Leftrightarrow \tan^2 x = 3 \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 60^\circ$

Fortegnsskjema viser:



abs. max for $\underline{x = \pi/3}$ (60°)

$$y_{max} = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{3}}{4}}} \approx 1.30$$

og abs min for $x=0$ og/eller $x=\pi/2$. Får

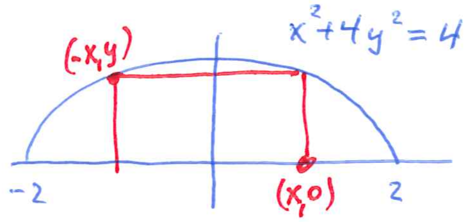
$f(0)=0$, $f(\frac{\pi}{2})=0$. Altså har f abs min

i både $\underline{\underline{x=0 \text{ og } x=\frac{\pi}{2}}}$ og min. verdien er $y_{min}=\underline{\underline{0}}$

b) Arealet er:

$$\int_0^{\pi/2} 4\sin^3 x \cos x\, dx \underset{u=\sin x}{=} \int_{x=0}^{x=\pi/2} 4u^3 du = \left[4\cdot\frac{u^4}{4}\right]_{u=0}^{u=1} = \underline{\underline{1}}$$

Oppgave 3



a) $\Delta V_x \approx \pi y^2 \Delta x \implies$

$$V_x = \pi\int_{-2}^{2} y^2 dx$$ Her er $4y^2=4-x^2$, dvs $y^2=\frac{4-x^2}{4} \implies$

$$V_x = \pi\int_{-2}^{2}\frac{1}{4}(4-x^2)dx = \frac{\pi}{4}\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{\pi}{4}\left(8-\frac{8}{3}-\left(-8+\frac{8}{3}\right)\right) = \underline{\underline{\frac{8\pi}{3}}}$$

b) Rektangelets areal $A=2x\cdot y$ der $y=\sqrt{\frac{4-x^2}{4}} \implies$

$$A = 2x\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} = x\cdot\sqrt{4-x^2}.$$

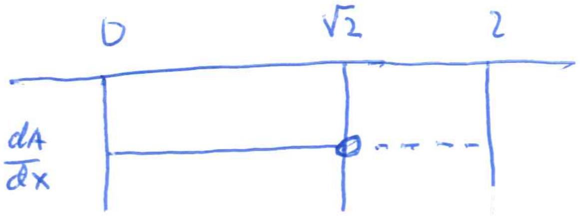
A er størst når den deriverte $\frac{dA}{dx}=0$

$$\frac{dA}{dx} = 1\cdot\sqrt{4-x^2} + x\cdot\frac{1}{\cancel{2}\cdot\sqrt{4-x^2}}\cdot(-\cancel{2}x) = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \underline{\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}}$$

$\frac{dA}{dx}=0 \iff 2x^2=4 \iff$

$x^2=2 \iff x=\sqrt{2}$

Får $y=\sqrt{\frac{4-x^2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$



Fortegnskjema viser at A har max. når $x=\sqrt{2}$

$\implies$ A har max når $\underline{\underline{(x,y)=\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}$

Oppgave 4 a)

a) Her er trapesmetoden implimentert fordi den er gitt ved tilnærmingen

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h(y_0+y_n)}{2} + h(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}), \quad y_i = f(x_i)$$

og $h = (b-a)/n$,

og S-en foran for-løkka beregner $h(y_0+y_n)/2$, og for-løkka beregner $h\cdot(y_1+y_2+\cdot+y_{n-1})$ der $y = x\cdot e^{2x-1}$. Skriptet beregner altså $\int_a^b x\cdot e^{2x-1}dx$ tilnærmet.

b) $$\int_0^1 x\underbrace{e^{2x-1}}_{int}dx = \left[x\cdot\frac{e^{2x-1}}{2} - \int 1\cdot\frac{e^{2x-1}}{2}dx\right]_0^1 =$$

$$\left[\frac{1}{2}xe^{2x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{4}e - \left(0 - \frac{1}{4}e^{-1}\right) = \underline{\underline{\frac{e+e^{-1}}{4}}}$$

$\approx \underline{0.7715}$

Opg. 5

a) $$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \frac{1}{4-3}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}}$$

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}}$$

b) Søylene er lin. avh. $\Leftrightarrow \det A = 0$. $\det A = 2\cdot 2 - 1\cdot a = 4-a$

Søylevektorene er derfor lin. avhengige $\Leftrightarrow \underline{\underline{a=4}}$

Totalmatrisa til $A\vec{x} = \vec{c}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ Lign. syst. er: $\underline{x_1 + 2x_2 = 4}$

Generell løsn.: $\underline{\underline{x_1 = -2x_2+4}}$, x_2 fri

Gen. løsn. på vektorform:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2+4 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{x_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Oppg. 6 $\quad y'\sqrt{1-x^2}+y=1 \quad , \; y(0)=2$.

Løser den som en separabel diff. l. (men den er også 1. ordens lineær)

$$y'\cdot\sqrt{1-x^2}=1-y \iff \frac{y'}{1-y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \iff$$

$$\int\frac{y'}{1-y}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \iff -\ln|1-y|=\arcsin x+C_1$$

$$\iff \ln|1-y|=-\arcsin x-C_1 \iff |1-y|=e^{-\arcsin x-C_1} \iff$$

$$1-y=\pm e^{-C_1}\cdot e^{-\arcsin x}=Ce^{-\arcsin x} \quad \text{der } C=\pm e^{C_1}$$

Den generelle løsningen er $\underline{y=1-Ce^{-\arcsin x}}$. Får

$$y(0)=1-Ce^0=1-C=2 \iff C=-1 .$$

Løsningen på initialverdiproblemet : $\underline{\underline{y=1+e^{-\arcsin x}}}$

Numerisk løsning ved Euler metode for $y'=F(x,y)$

Siden $y'\cdot\sqrt{1-x^2}=1-y \iff y'=\frac{1-y}{\sqrt{1-x^2}}$, så må la

$$F(x,y)=\frac{1-y}{\sqrt{1-x^2}}$$

Skript i MATLAB

```
x1 = 0 ; y1 = 2              % initialbetingelsen
h = (1-0)/n ;                % diff. l. "løses" over intervallet [0,1]
x = x1 : h : 1 ;             % og n må leses inn før skriptet kjøres
y = zeros (1, n+1) ; y(1) = y1 ;
for k = 1:n
    y(k+1) = y(k)+h*(1-y(k))/sqrt(1-x(k)^2);
end
plot (x,y)
```

Oppg. 7 $4y''+4y'+10y = 36e^{-2x}$

Løser først $4y''+4y'+10y = 0$

Kar. lign. $4r^2+4r+10 = 0 \iff (2r+1)^2+9 = 0$

$2r+1 = \pm 3i$

Røtter $\underline{r = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i}$

En løsn. $y = e^{(-\frac{1}{2}+i\frac{3}{2})x} = e^{-\frac{x}{2}} \cdot e^{i\frac{3}{2}x} = e^{-\frac{x}{2}}(\cos\frac{3}{2}x + i\sin\frac{3}{2}x)$

Realdel og Imaginærdel er løsningen. Gen. løsn.:

$$y_h = e^{-\frac{x}{2}}(c_1\cos\frac{3x}{2} + c_2\sin\frac{3x}{2})$$

Søker part. løsn. av formen $\underline{y_p = ae^{-2x}}$

$y_p' = (-2)ae^{-2x}$, $y_p'' = (-2)^2ae^{-2x}$. Innsatt:

$4(-2)^2a + 4(-2)a + 10a = 36$ (har forkortet med e^{-2x})

$\iff (26-8)a = 36 \iff 18a = 36 \iff a = 2$.

Gen. løsn. $y = y_h + y_p = \underline{\underline{e^{-\frac{x}{2}}(c_1\cos\frac{3x}{2} + c_2\sin\frac{3x}{2}) + 2e^{-2x}}}$

Oppg. 8

a) $3B = 3\begin{bmatrix} -2 & 7 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -6 & 21 & 9 \\ -9 & -3 & 3 \end{bmatrix}}}$

$2A-3B$ er ikke definert fordi matrisene har ulik antall rader

$A \cdot B$ skulle bli en $(3\times 3)\cdot(2\times 3)$, men $3 \neq 2$ gjør at prikkproduktene ikke kan regnes ut, dvs $\underline{A \cdot B \text{ ikke definert}}$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & t^2-t \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 21 & 12 & -9+3(t^2-t) \\ -2 & -4 & -2+t^2-t \end{bmatrix}}}$$

Totalmatrisa:

b) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & t^2-t & 2t+1 \end{bmatrix} \underset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-3R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & t^2-t-3 & 2t-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^2-t & 2t-2 \end{bmatrix}$$

i) Systemet har nøyaktig én løsn. når $t^2-t \neq 0 \iff \underline{\underline{t \neq 1, t \neq 0}}$

ii) systemet har uendelig mange løsninger når

$$t^2 - t = 0 \text{ og } 2t-2=0 \iff \underline{\underline{t=1}}$$

iii) systemet har ingen løsning når

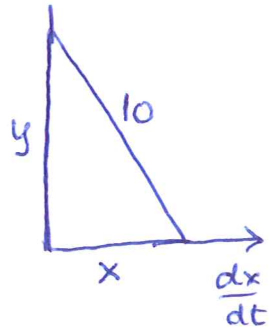
$$t^2 - t = 0 \text{ og } 2t-2 \neq 0 \iff \underline{\underline{t=0}}$$

c) $$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & t^2-t \end{vmatrix} \underset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-3R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & t^2-t-3 \end{vmatrix} \underset{R_3-R_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & t^2-t \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \det A = (-3)(t^2-t) = \underline{\underline{-3t(t-1)}}$. Matrisa er invertibel når $\det A \neq 0$, dvs $\underline{t \neq 0 \text{ og } t \neq 1}$. Etter et teorem fra forelesningene, så er A invertibel ekvivalent med "nøyaktig én løsning", som samstemmer med b)

Oppg. 9

Skal finne $\frac{dy}{dt}$ når $x=6$ og $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}$ (m/s)



LØSN.

$x^2 + y^2 = 100$ etter Pytagoras

Deriverer med hensyn til t:

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$y\frac{dy}{dt} = -x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x \cdot dx/dt}{y}$$

Når $x=6$, så er

$y = \sqrt{100-6^2} = 8$

(benevning for x og y: m)

Får $$\frac{dy}{dt} = -\frac{6 \cdot 1/3}{8} = -\frac{2}{8} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}} \text{ (m/s)}$$