Oppg. 1

a) i) $f(x) = (x \sin x)^2$

$$f'(x) = 2(x \sin x) \cdot (x \sin x)' =$$

$$2x \sin x \, (1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x) =$$

$$\underline{\underline{2x \sin^2 x + 2x^2 \sin x \cos x}} =$$

$$2x \sin^2 x + x^2 \sin(2x)$$

ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$

Både teljar og nemnar i brøken går mot 0 når $x \to 0$. Vi brukar L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(\sin x)'} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{0 - (-\sin x)}{\cos x} = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \underline{\underline{0}}$$

b) i) $\displaystyle\int \frac{\arcsin(2x)}{\sqrt{1 - 4x^2}} \, dx$

Variabelbyte: $u = \arcsin 2x$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - (2x)^2}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$$

$$dx = \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4x^2} \, du$$

$$\int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1 - 4x^2}} \, dx = \int \frac{u}{\sqrt{1 - 4x^2}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4x^2} \, du =$$

$\frac{1}{2}\int u\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}u^2 + C' = \underline{\frac{1}{4}(\arcsin(2x))^2 + C'}$

ii) $\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\sin x\right)dx$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 x^{-1/2}dx = \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-1/2+1}\right]_0^1 =$

$2\,[\sqrt{x}]_0^1 = 2$

Delvis integrasjon: $\int_a^b u v'\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,dx$

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = \sin x \Leftarrow v = -\cos x$

$\int_0^1 x\sin x\,dx = [x\cdot(-\cos x)]_0^1 - \int_0^1 1\cdot(-\cos x)\,dx =$

$-[x\cos x] + \int_0^1 \cos x\,dx = -(1\cos 1 - 0) + [\sin x]_0^1 =$

$-\cos 1 + (\sin 1 - \sin 0) = -\cos 1 + \sin 1$

Til saman:

$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x\sin x\right)dx = 2 - (-\cos 1 + \sin 1) =$

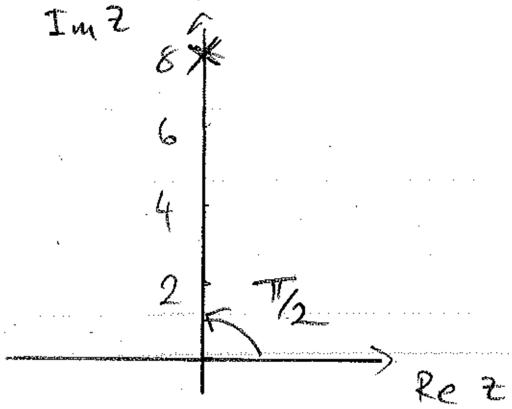
$\underline{2 + \cos 1 - \sin 1} \approx 1.699$

c) i) $z = x + iy = re^{i\theta}$ der

$r^2 = x^2 + y^2$ og $\tan\theta = \frac{y}{x}$

Her er $x=0$ og $y=0$, så $\tan\theta$ er ikkje definert. Men det er lett å sjå kva θ er om vi teiknar z

inn i det komplekse planet:



Altså: $\theta = \frac{\pi}{2}$

$r^2 = 0^2 + 8^2$, $r = 8$

Vi får at $z = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$

(ii) Kan også skrive $8e^{i\frac{\pi}{2}}$ som $8e^{i(\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi)}$ der n er eit heiltal ($n \in \mathbb{Z}$).

$$z^2 = 8\, e^{i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}$$

$$z = \left[8\, e^{i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}\right]^{1/2} = \sqrt{8}\, e^{i(\frac{\pi}{4}+n\pi)}$$

$n=0$: $z = \sqrt{8}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) =$

$2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2+2i$

$n=1$: $z = \sqrt{8}\, e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi)} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) =$

$2\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = -2-2i$

Altså: $z = \underline{\underline{\pm(2+2i)}}$

Oppg. 2

$f(x) = x + 2e^{-x}$, $D_f = [0, 2]$

f er kontinuerleg deriverbar på heile D_f. Difor må ekstremalpunkt anten vere randpunkt eller punkt der $f'(x) = 0$

$f'(x) = 1 + 2e^{-x} \cdot (-1) = 1 - 2e^{-x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$-x = \ln \frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2 \Leftrightarrow x = \ln 2 \approx$

$f(\ln 2) = \ln 2 + 2e^{-\ln 2} = \ln 2 + 2 \cdot (e^{\ln 2})^{-1} =$

$\ln 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = \ln 2 + 1 \approx$

Randpunkt:

$f(0) = 0 + 2e^{0} = 2$

$f(2) = 2 + 2e^{-2} \approx$

Globalt maksimalpunkt: $\underline{\underline{(2,\ 2 + 2e^{-2})}} \approx (2,\ 2.27)$

Globalt minimalpunkt: $\underline{\underline{(\ln 2,\ \ln 2 + 1)}} \approx (0.69,\ 1.69)$

Oppg. 3

a) $AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 4\cdot 1 & 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 4\cdot 1 & 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 4\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 4\cdot 2 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 4\cdot 1 + 1\cdot 1 & 2\cdot 3 + 4\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 3 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} 9 & 7 & 9 \\ 11 & 7 & 11 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}}}$$

B er ei diagonalmatrise. Vi kan rekne ut B^5 på denne måten:

$$B^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 1^5 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 0 \\ 0 & 0 & 3^5 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{bmatrix}}}$$

$$2A - A^T = 2\cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2\cdot 1 - 1 & 2\cdot 2 - 2 & 2\cdot 4 - 1 \\ 2\cdot 2 - 2 & 2\cdot 4 - 4 & 2\cdot 1 - 1 \\ 2\cdot 1 - 4 & 2\cdot 1 - 1 & 2\cdot 1 - 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}}$$

b) $D(D+X) = E^2(X+F) \Leftrightarrow$

$D^2 + DX = E^2X + E^2F \Leftrightarrow$

$DX - E^2X = E^2F - D^2 \Leftrightarrow$

$(D-E^2)X = E^2F - D^2 \Leftrightarrow$

$(D-E^2)^{-1} \cdot (D-E^2)X = (D-E^2)^{-1}(E^2F - D^2) \Leftrightarrow$

$X = \underline{\underline{(D-E^2)^{-1}(E^2F-D^2)}}$

Det er gitt at $(D-E^2)^{-1}$ eksisterar.

c) Likningssystemet kan skrivast slik:

$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ b \end{bmatrix}$ med $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ a & a \end{bmatrix}$

Det har eintydig løysing hvis og berre hvis $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ a & a \end{vmatrix} = 2a - 6a = -4a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0.$

i) <u>Likningssystemet har eintydig løysing</u>
<u>når $a \neq 0$.</u>

Når $a=0$, blir likning nr. to slik:

$0x_1 + 0x_2 = b$

(Liken. nr. er uavhengig av a og b).

Vi ser direkte at

ii) likningssystemet har uendeleg mange løysingar når $a = b = 0$ og

iii) inga løysing når $a = 0$ og $b \neq 0$.

Oppg. 4

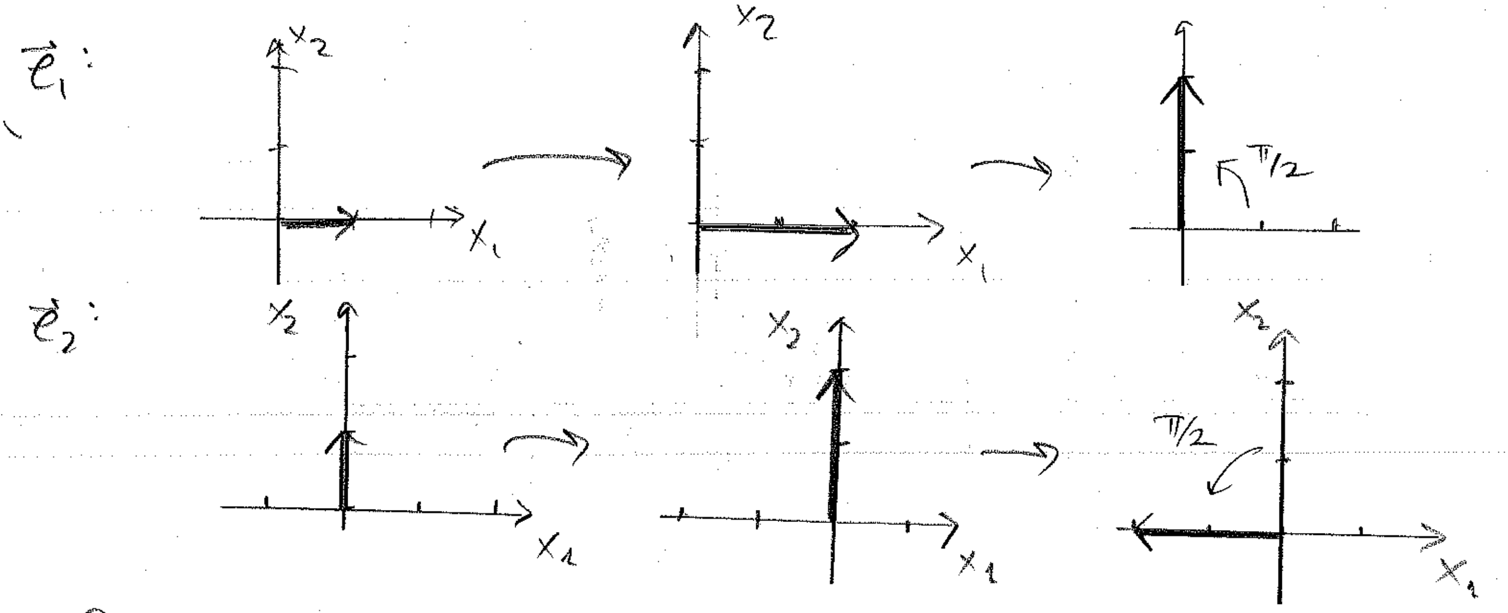
Av figuren ser vi at rotasjon $\frac{\pi}{2}$ rad $= 90°$ mot klokka sender $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ til $\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$. Denne skal så gangast med 2. Det gir at

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y \\ 2x \end{bmatrix} =$$

$$x\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Standardmatrisa til T er altså $\underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}}$.

Vi kan også finne standardmatrisa ved $[\, T(\vec{e}_1) \mid T(\vec{e}_2) \,]$ der $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Av figuren på neste side ser vi at $T(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $T(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.



Oppg. 5

a) Vi brukar midtpunktsformelen for numerisk integrasjon:

$$\phi'(2\,s) \approx \frac{\phi(2.50\,s) - \phi(1.50\,s)}{2 \cdot 0.50\,s} =$$

$$\frac{2.30\ m^3/s - 1.64\ m^3/s}{1.00\,s} \approx \underline{0.66\ m^3/s^2}$$

b) Vassmengda som har passert er integralet av straumen. Vi estimerar dette integralet med trapesmetoden:

$$\int_{1.50\,s}^{4.00\,s} \phi(t)\,dt \approx 0.50\,s \cdot \Big(\tfrac{1}{2}\phi(1.50\,s) + \phi(2.00\,s) + \phi(2.50\,s) + \phi(3{,}00\,s) + \phi(3.50\,s) + \tfrac{1}{2}\phi(4.00\,s)\Big) =$$

$$0.5\,s \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot 1.64 + 1.94 + 2.30 + 2.71 + 3.21 + \tfrac{1}{2} \cdot 3.79\right) m^3/s \approx$$

$$\underline{6.44\ m^3}$$

Oppg. 6

I linje 1 og 2 er både xn og xg sett til å vere 3. Dermed er $|xn - xg| = 0 <$ Pres; og while-løkka kjem aldri i gong.

I linje 6 kjenner vi att formelen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{med} \quad f(x) = e^x \cos x + 1.$$

Kontroll: $f'(x) = e^x \cos x + e^x(-\sin x) + 0 =$
$e^x \cos x - e^x \sin x$.

Dette er Newtons metoden. Den estimerar løysinga av ei likninga $f(x) = 0$. Vi forsøker altså å løyse likninga

$$\underline{e^x \cos x + 1 = 0.}$$

Oppg. 7

a) $y' = 4e^{2x-y}$, $y(0) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4e^{2x}}{e^y}$$

$$e^y dy = 4e^{2x} dx$$

$$\int e^y dy = \int 4 e^{2x} dx$$

$$e^y = 4 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} + C = 2e^{2x} + C$$

$$y = \ln(2e^{2x} + C)$$

Initialkrav: $y(0) = 0$

$$0 = \ln(2e^0 + C) = \ln(2 + C) \Leftrightarrow$$

$$e^0 = 2 + C \Leftrightarrow C = -1$$

$$\underline{y(x) = \ln(2e^{2x} - 1)}$$

b) $4y'' + 12y' + 9y = 18$

Vi løyser fyrst den homogene differensiallikninga $4y'' + 12y' + 9y = 0$ ved å gå ut frå at $y = e^{rx}$. Det gir at $y' = re^{rx}$ og $y'' = r^2 e^{rx}$ slik at

$$4r^2 e^{rx} + 12r e^{rx} + 9e^{rx} = 0 \Leftrightarrow$$

$4r^2+12r+9=0 \Leftrightarrow$

$$r=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot4\cdot9}}{2\cdot4}=\frac{-12\pm0}{8}=-\frac{3}{2}$$

Generell løysing av homogen likning:

$y_h=e^{-\frac{3}{2}x}(A+Bx)$.

Går ut frå at ei løysing av den inhomogene likninga kan skrivast som $y_p=a$. Det gir $y_p'=y_p''=0$. Vi bestemmer a ved å setje y_p inn i differensiallikninga:

$4\cdot0+12\cdot0+9\cdot a=18 \Leftrightarrow a=2$

Generell løysing: $y=y_h+y_p$

$\underline{\underline{y(x)=e^{-\frac{3}{2}x}(A+Bx)+2}}$

Oppg 8

a) Inntekinga og dei månadsvise utgiftene seier ikkje noko om kor mykje pengar dei har, $K(t)$, men kor fort denne pengemengda endrar seg – altså $K'(t)$. Inntektene, $5\% \cdot K(t)=0.05K$, gir eit positivt bidrag til K, medan utgiftene,

$100+5t$ gir eit negativt bidrag.

Altså: $K'(t) = 0.05\,K(t) - (100+5t)$.

Differensiallikninga kan løysast på same måte som i oppg. 7b) eller ved å bruke integrerande faktor. Vi gjer det fyrste fyrst:

$$K' - 0.05K = -100 - 5t$$

- Går ut frå at $K = e^{rt}$ og løyser den homogene likninga $K' - 0.05K = 0$

$r e^{rt} - 0.05 e^{rt} = 0 \iff r = 0.05$

$K_h = C e^{0.05t}$.

- Går ut frå at vi kan finne ei partikulær løysing av den inhomogene likninga på forma $K_p = a + bt$

$K_p' = b$

$b - 0.05(a+bt) = -100 - 5t$

$-0.05bt + (b - 0.05a) = -5t - 100$

Gir at $-0.05b = -5$ og $b - 0.05a = -100$

$b = \frac{-5}{-0.05} = 100$ og $a = \frac{-100-100}{-0.05} = 4000$

Det gir $K_p = 400 + 100t$ og generell løysing

$$\underline{K(t) = K_h + K_p = C e^{0.05t} + 4000 + 100t}$$

$\square$

Med integrerande faktor:

$$K' - 0.05K = -100 - 5t$$

Integrerande faktor: e^F der $F'(t) = -0.05$

$F(t) = -0.05t$

$$e^{-0.05t}(K' - 0.05K) = e^{-0.05t}(-100 - 5t)$$

$$(e^{-0.05t}K)' = e^{-0.05t}(-100 - 5t)$$

$$e^{-0.05t}K = \int e^{-0.05t}(-100 - 5t)\,dt =$$

$$-100 \int e^{-0.05t}\,dt - 5 \int t\, e^{-0.05t}\,dt =$$

$$-\frac{100}{-0.05} e^{-0.05t} - 5\left(-\frac{t}{0.05} e^{-0.05t} - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{0.05}\right) e^{-0.05t}\,dt\right)$$

$$= 2000 e^{-0.05t} + 100\, t\, e^{-0.05t} - 100 \int e^{-0.05t}\,dt =$$

$$2000 e^{-0.05t} + 100t\, e^{-0.05t} - \frac{100}{-0.05} e^{-0.05t} + C =$$

$$4000 e^{-0.05t} + 100t\, e^{-0.05t} + C$$

Vi har her brukt delvis integrasjon. Vi får:

$$K(t) = e^{+0.05t}\left(4000 e^{-0.05t} + 100t e^{-0.05t} + C\right) =$$

$$\underline{4000 + 100t + C e^{0.05t}}$$

b) På lang sikt vil $e^{0.05t}$ bli mykje større enn $4000+100t$; eksponentialleddet vil dominere det lineære leddet. Difor må dette vere positivt for at verksemda skal tene pengar på lang sikt:

$C > 0$

$K(0) = 4000 + 100 \cdot 0 + C e^0 = 4000 + C > 4000$

$K(0) > 4000.$

Verksemda må ha over $4000 \cdot 10^3$ kr, altså over 4 millionar kroner, i startkapital.

Oppg. 9

a) $f(x) = \ln(x^2-3)$

$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2$

Gitt: $a = 2$

$f(2) = \ln(2^2-3) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x^2-3} \cdot (x^2-3)' = \frac{2x}{x^2-3}$

$f'(2) = \frac{2 \cdot 2}{2^2-3} = 4$

$$f''(x) = \frac{2(x^2-3) - 2x\cdot(2x-0)}{(x^2-3)^2} = \frac{-2x^2-6}{(x^2-3)^2}$$

$$f''(2) = \frac{-2\cdot 2^2-6}{(2^2-3)^2} = -14$$

$$P_2(x) = 0 + 4(x-2) + \frac{1}{2}\cdot(-14)\,(x-2)^2 = \underline{4(x-2) - 7(x-2)^2}$$

b) $$\int_{1.8}^{2.3} (\ln(x^2-3) + 2x)\,dx \approx \int_{1.8}^{2.3} (P_2(x) + 2x)\,dx =$$

$$\int_{1.8}^{2.3} (4(x-2) - 7(x-2)^2 + 2x)\,dx =$$

$$\frac{4}{2}\left[(x-2)^2\right]_{1.8}^{2.3} - \frac{7}{3}\left[(x-2)^3\right]_{1.8}^{2.3} + \left[x^2\right]_{1.8}^{2.3} \approx \underline{\underline{2.07}}$$