Oppgave 1

a) i) Deriver funksjonen

$$f(x) = (x \sin x)^2 \ .$$

ii) Bestem grenseverdien

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \ .$$

b) Regn ut

i) $\displaystyle \int \frac{\arcsin(2x)}{\sqrt{1-4x^2}} \, \mathrm{d}x$

ii) $\displaystyle \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x \sin x \right) \mathrm{d}x \ .$

c) i) Skriv $8i$ på polar form.

ii) Løs likninga $z^2 = 8i$ og skriv løsningene på kartesisk (normal) form.

Oppgave 2

Vi har gitt følgende funksjon

$$f(x) = x + 2e^{-x}, \ \ D_f = [0, 2] \ .$$

Regn ut globalt (absolutt) maksimum og minimum til f.

Oppgave 3

Disse matrisene er gitte:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

a) Regn ut[1] AC, B^5 og $2A - A^T$.

[1] Med "A^n" menes A multiplisert med seg selv n ganger.

b) La D, E og F være tre $n \times n$ matriser. Løs følgende likning med hensyn på X

$$D(D+X) = E^2(X+F)$$

når det er kjent at matrisen $D - E^2$ er invertibel.

c) Gitt likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 &= 4 \\ ax_1 + ax_2 &= b\ , \end{aligned}$$

bestem parametrene a og b slik at systemet har

i) entydig løsning.
ii) uendelig mange løsninger.
iii) ingen løsning.

Oppgave 4

Vi har en transformasjon

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\ .$$

Transformasjonen er en komposisjon av en forlengelse (multiplikasjon) med en faktor 2 som virker på vektoren $\mathbf{x}$, etterfulgt av en rotasjon med vinkelen $\frac{\pi}{2}$ mot urviseren. Angi standardmatrisen til transformasjonen.

Oppgave 5

Tabell 1: Data for vannstrøm

t (s)	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
ϕ (m^3/s)	1,64	1,94	2,30	2,71	3,21	3,79

a) Vi observerer vann som passerer et bestemt punkt. Tabell 1 viser strømningshastigheten til vannet, ϕ, når det passerer ved ulike tidspunkter, t. Med strømningshastighet mener vi hvor stort volum med vann som passerer punktet vi observerer per tidsenhet. Regn ut en tilnærmet verdi for endring per tidsenhet i strømingshastighet ved tida $t = 2$ s.

b) Regn ut den totale vannmengden som har passert mellom $t = 1,50$ s og $t = 4,00$ s.

Oppgave 6

Følgende ukommenterte skript er gitt:

```
xn=3;
xg=3;
Pres=0.001;
while(abs(xn-xg)>Pres)
    xg=xn;
    xn=xg-(exp(xg)*cos(xg)+1)/(exp(xg)*cos(xg)-exp(xg)*sin(xg));
end
xn
```

Det er en feil i skriptet over. Hvilken er det?
Hvilken likning ønsker man å løse ved bruk av skriptet?

Oppgave 7

a) Løs initialverdiproblemet

$$y' = 4e^{2x-y} \ , \quad y(0) = 0 \ .$$

b) Finn den generelle løsninga av differensiallikninga

$$4y'' + 12y' + 9y = 18 \ .$$

Oppgave 8

En gruppe optimistiske personer vurderer å starte en bedrift. Til grunn for vurderinga legger de følgende premisser:

- Hver måned vil de tjene inn en pengesum som svarer til 5 % av pengene bedriften til en hver tid har i banken.
- De månedlige utgiftene, gitt i antall tusen kroner, vil følge formelen $100 + 5t$, der t er tida gitt i måneder.

For enkelhets skyld antar vi at både inntekter og utgifter er kontinuerlige funksjoner av tida.

a) Forklar hvordan premissene overfor leder fram til følgende differensiallikning:
$$K'(t) = 0.05\,K(t) - (100 + 5t),$$
der K er pengene bedriften har i banken i antall tusen kroner, og vis hvordan vi kan komme fram til denne generelle løsninga:
$$K(t) = 4000 + 100t + Ce^{0.05\,t}\ .$$

b) Om vi antar at premissene er riktige – også på lang sikt, hvor stor startkapital, $K(0)$, trenger de for at bedriften skal være bærekraftig?

Oppgave 9

a) Vis at
$$P_2(x) = 4(x-2) - 7(x-2)^2$$
er Taylor-polynomet av 2. orden til funksjonen $\ln(x^2 - 3)$ om $x = 2$.

b) Bruk polynomet til å estimere verdien av det bestemte integralet
$$\int_{1.8}^{2.3} \big(\ln(x^2-3) + 2x\big)\,\mathrm{d}x\ .$$