Oppgave 1

a) Finn den deriverte av disse funksjonene:

i) $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$

ii) $g(x) = \ln x^3 - \frac{\sin x}{x^2}$.

b) Finn disse ubestemte integralene:

i) $\int (2x+3)^3 \, dx$

ii) $\int 6\cos(3x)\, \sin^5(3x)\, dx$.

c) Finn disse bestemte integralene:

i) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{x+2} \, dx$

ii) $\int_{-1}^{1} 2x \, \ln(x+2)\, dx$.

Oppgave 2

Løs differensiallikninga

$$xy' - 3y = 2x^5 \ , \quad x > 0 \quad .$$

Oppgave 3

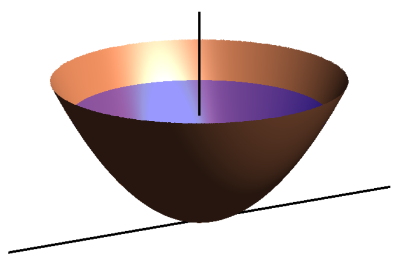
I tabellen under er farten til en akselererende racerbil loggført:

Tid (sekunder)	0	2	4	6	8	10
Fart (km/h)	0	113	204	267	292	302

Bruk tabellen til å estimere hvor langt denne bilen har kjørt på disse 10 sekundene.

Oppgave 4

Et vannkar har en fasong som kommer fram ved å rotere parabelen gitt ved $y = x^2$, $x \geq 0$, om y-aksen – eller, alternativt, ved å rotere grafen til den inverse funksjonen om x-aksen. Se figur 1.



Figur 1: Illustrasjon av karet i oppgave 4. Figuren er forresten laget i MATLAB.

Karet har vann opp til høgda h med enheten desimeter (dm).

a) Vis hvordan vi kan komme fram til at volumet av vannet, målt i liter (dm^3), er
$$V = \frac{\pi}{2} h^2 \quad .$$

b) Vann helles opp i karet med konstant fart $V'(t) = \frac{dV}{dt} = 0.1$ – målt i liter per sekund (l/s). Dermed blir høgda h en funksjon av tida, $h(t)$. Hvor fort øker høgda h idet $h = 4$?

c) Deretter dras det ut en propp i bunnen av karet, og vannet begynner å renne ut. Vannvolumet som renner ut av karet per tidsenhet er proporsjonalt med kvadratroten av h, med proporsjonalitetsfaktor 0.1 dm$^{5/2}$/s. Samtidig helles det fremdeles vann inn i karet med farten 0.1 l/s.

Vis hvordan dette fører til følgende differensiallikning for vannhøgda $h(t)$:
$$-0.1\sqrt{h} + 0.1 = \pi h \cdot h' \quad .$$

Systemet er slik at etter hvert som tida går, vil vannhøgda h gå mot en bestemt verdi. Bruk differensiallikninga over til å bestemme denne verdien. (*Hint: Det er ikke nødvendig å løse differensiallikninga for å finne denne h-verdien.*)

Oppgave 5

Nedenfor er det gitt to noe mangelfullt kommenterte skript som kan kjøres i MATLAB eller Octave. For hvert av skriptene: Hvilken algoritme/metode er implementert her? Og hvilket konkret problem forsøker de å estimere løsninga av?
(*Du skal ikke løse disse problemene, bare formulere dem.*)

a) Første skript:

```
x0=1;               % Startverdi
P=1e-4;             % Presisjon

xGm=10;
x=x0;
while abs(x-xGm)>P
  xGm=x;
  x=x-(sqrt(x)-cos(x^2))/(1/(2*sqrt(x))+2*x*sin(x^2));
end

x                   % Skriver x til skjerm
```

b) Andre skript:

```
% Startverdier
x0=0;
y0=1;
% Sluttverdi
xF=4;

% Oppdeling
n=500;
h=(xF-x0)/n;

xVektor=x0:h:xF;
yVektor=zeros(1,n+1);
y(1)=y0;

for i=1:n
  x=xVektor(i);
  y=yVektor(i);
  yD=x/2+5*sin(y);
  yVektor(i+1)=y+yD*h;         % Neste y-verdi
end

plot(xVektor,yVektor)          % Plotter resultat
```

Oppgave 6

Følgende matriser er gitt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad C = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Dersom noe av det vi ber deg regne ut nedenfor ikke er definert, skal du kort forklare hvorfor.

a) Regn ut $2A - 3B$, $2B - 3C$, BC og CB.

b) Finn A^{-1} og B^{-1}.

Bruk blant annet dette svaret til å finne matrisa X i likninga

$$AX + C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

c) Dette likningssystemet er gitt:

$$\begin{array}{rrrcl} & (a+2)\,x_2 + & 2\,x_3 & = & 2 \\ x_1 + & 2\,x_2 + & 3\,x_3 & = & 3 \\ 2\,x_1 + & 4\,x_2 + & (a+4)\,x_3 & = & b+1 \end{array} \quad .$$

For hvilke verdier av a og b har ikke likningssystemet noen løsning (er inkonsistent)? For hvilke a og b har likningssystemet uendelig mange løsninger, og når har systemet nøyaktig én løsning?

Oppgave 7

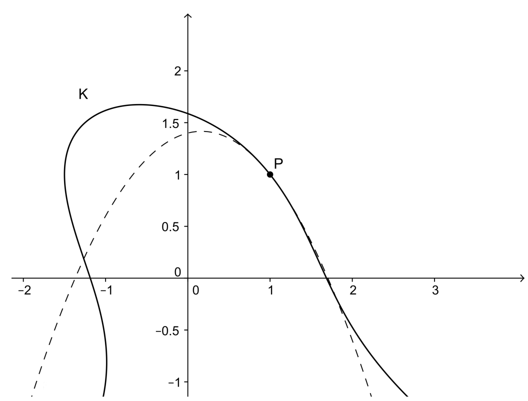
Det skal lages en bygning med horisontalt tak (og gulv) og rektangulære loddrette vegger. Tak og gulv er kvadratiske og bygningen skal romme 6.75 m^3. Utgiftene for å lage taket er 3 ganger så store per m^2 som utgiftene for å lage 1 m^2 av gulvet. Utgiftene til vegg og gulv er like store per m^2.

Finn lengde og bredde av en av veggene dersom utgiftene for å lage bygningen skal bli lavest mulig.

Oppgave 8

Finn den generelle løsninga av differensiallikninga

$$y'' + 6y' + 25y = 17e^{-2x} \; .$$



Figur 2: Illustrasjon til oppgave 9. Kurven K er tegna inn sammen med Taylor-polynomet av grad 2 omkring punktet $P = (1, 1)$ (stipla).

Oppgave 9

En kurve K er implisitt gitt ved

$$y^3 + 2xy + 2x^2 = x + 4\ .$$

Kurven er illustrert i figur 2.

a) Vis at kurven går gjennom $P = (1, 1)$ og at stigningstallet til tangenten til K i P er -1. Vis også at $y'' = -6/5$ i P.

b) Vi kan anta at kurven K er gitt som en funksjon $y = f(x)$ nær P. Finn Taylor-polynomet av grad 2 til $y = f(x)$ om $x = 1$.

Oppgave 10

a) Undersøk om søylevektorene i matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige.

Om transformasjonen T fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^2$ vet vi at den er lineær og at

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad T(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \quad ,$$

for passende valg av parameteren t. Er dette tilstrekkelig informasjon til å bestemme standardmatrisa til T?

b) Forklar hvorfor parameteren t over *må* være -4.