Høgskolen i Oslo
www.hio.no

Avdeling for ingeniørutdanning

Eksamen i Matematikk 1000

Dato: .08.2011

Tid: 09.00 - 14.00

Antall sider inklusive forside og vedlegg: 5

Antall oppgaver: 7

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Vedlegg: Formelark.

Merknad: Kandidaten må selv kontrollere at oppgavesettet er fullstendig. Ved eventuelle uklarheter i oppgaveteksten skal du redegjøre for de forutsetninger du legger til grunn for løsningen. Mellomregning og begrunnelse skal tas med i innføringen.

Faglig veileder: Lars Tuset

Utarbeidet av (faglærer):	Kontrollert av (en av disse):			Studieleders/ Fagkoordinators underskrift:
	Annen lærer	Sensor	Studieleder/ Fagkoordinator	
Lars Tuset		Terje Solli		

Emnekode: FO 010 A

Oppgave 1 :

a) Finn en matrise P som diagonaliserer matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, og angi den tilhørende diagonalmatrisen D.

b) Løs differensiallikningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + 5y \\ \frac{dy}{dt} &= 4x + 2y \end{aligned}$$

Oppgave 2 :

a) Finn grenseverdiene:

i) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sin x}{x}$ ii) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x$

b) Finn den deriverte y' av $y = y(x)$ når y er gitt ved:

i) $y = x^2 \cos(x^2)$ ii) $2y^3 + x^2y^2 + x = 0$

c) Vis at likningen

$$e^{-x} = x$$

har nøyaktig en løsning i intervallet $[0, 1]$. Bruk Newtons metode til å finne x_2 når vi starter med $x_0 = 0$.

Oppgave 3 :

Et fiskesnøre trekkes inn med en hastighet på 2/5 m/s. Tuppen av fiskestangen holdes hele tiden 3 m over vannskorpen, snøret er alltid stramt, sluket ligger hele tiden i vannskorpen, og det trekkes vinkelrett inn mot land. Hvor fort nærmer sluket seg land når avstanden fra tuppen og ut til sluket er 5 m ?

Oppgave 4 :

Den lineære transformasjonen S er en speiling om yz-planet. En annen lineær transformasjon er $T(x, y, z) = (3y - z, x + 5y, 2x + y - 3z)$.

a) Angi matrisene A og B til henholdsvis S og T.

b) Vis at matrisen til den sammensatte transformasjonen ST er $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

Finn også matrisen til TS.

c) Angi på rent geometrisk grunnlag egenvektorene og egenverdiene til matrisen A, altså uten å bruke det karakteristiske polynomet til A. Kontroller svaret ved å bruke definisjonen av egenvektorer.

Oppgave 5 :

a) Beregn integralene:

$$\text{i)} \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx \qquad \text{ii)} \int \frac{x^3+1}{x^2+1}\,dx$$

b) y-aksen og grafene til funksjonene $f(x) = 1$ og $g(x) = x^3$ avgrenser et område i xy-planet. Finn arealet A til dette området. Finn deretter volumet V av rotasjonslegemet som oppstår når området roteres om x-aksen.

Oppgave 6 :

Løs initialverdiproblemene:

a) $\dfrac{y'}{x^2+1} + \dfrac{1}{\sin y} = 0\ ,\ \ y(0) = \frac{\pi}{2}$

b) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ ,\ \ y'(0) = y(0) = 1$

Oppgave 7 :

a) Gitt to matriser

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Finn $2B$, AB, $B^2 + A^3$ og A^{-1} hvis de eksisterer.

b) Avgjør for hvilke verdier av a følgende likningssystem har eksakt en løsning, uendelig mange løsninger eller ingen løsning :

$$\begin{array}{rcrcrcr} (a+1)\,x & + & y & + & (a+3)\,z & = & -1 \\ 3\,x & + & a\,y & - & (a+4)\,z & = & 1 \\ x & + & y & + & (a+3)\,z & = & -3 \end{array}$$

Skriv løsningene på vektor-form når det er uendelig mange løsninger.

c) Løs systemet når $a = -1$.