Forslag til løsning på prøveeksamen

i FO340E.

1.

Bevegelsesmengden bevares i kollisjonene siden det ikke virker ytre krefter på bilene (i horisontalretningen).

a) I en elastisk kollisjon er den kinetiske energien bevart.

Siden massene er like forventer vi at den røde bilen beveger seg mot venstre med fart 3m/s og den blå bilen beveger seg mot høyre med fart 2m/s.

La u_1 vere farten til den røde bilen etter kollisjonen og la u_2 vere farten til den blå bilen etter kollisjonen.

La $m = 1kg$. Vi velger den positive retningen til å vere mot høyre.

Bevaring av bevegelsesmengden:

$$m(u_1 + u_2) = m(V_1 + V_2)$$

$$u_1 + u_2 = -1 \, m/s$$

Bevaring av kinetisk energi:

$$\frac{1}{2}m(u_1^2 + u_2^2) = \frac{1}{2}m(V_1^2 + V_2^2)$$

$$u_1^2 + u_2^2 = (4+9)\, m^2/s^2 = 13\, m^2/s^2.$$

Løsningene til likningssettet er $u_1 = 2m/s$, $u_2 = -3m/s$

og $u_1 = -3m/s$ og $u_2 = 2m/s$

(Merk at likningssystemet er symmetrisk i u_1 og u_2.)
Som vi forventet blir farten til den røde bilen 3m/s mot venstre og farten til den blå bilen blir 2m/s mot høyre. (" Bilene har byttet fart ")

b) I en fullstendig uelastisk kollisjon vil bilene bevege seg med samme fartsvektor etter kollisjonen. La u betegne denne farten.
Bevaring av bevegelsesmomentet gir:

$$(1\,\text{kg} + 2\,\text{kg}) \cdot u = 1\,\text{kg} \cdot 2\,\text{m/s} + 2\,\text{kg}\,(-3\,\text{m/s})$$

$$= -4\,\text{kg}\,\text{m/s}.$$

$$u = \frac{-4\,\text{kg}\,\text{m/s}}{3\,\text{kg}} = -\frac{4}{3}\,\text{m/s}.$$

Bilene vil bevege seg mot venstre med farten $\underline{\frac{4}{3}\,\text{m/s}}$.

c) La $m_1 = 1\,kg$ og $m_2 = 2\,kg$.

Bevaring av bevegelses mengde og kinetisk energi gir:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 = 1kg \cdot 2m/s - 2kg \cdot 3m/s$$
$$= -4\,kg\,m/s$$

$$\frac{1}{2}(m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2) = \frac{1}{2}(m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2) = \frac{1}{2}(1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2)\,kg\,m^2/s^2$$
$$= \frac{22}{2} J = \underline{11\,J}$$

Før vi løser likningssettet kan vi prøve å beskrive bevegelsene etter kollisjonen. Siden bevegelsesmengden er negativ forventer vi at den røde bilen må gå mot venstre.

Hvis vi går utfra at den røde bilen mottar hele bevegelsesmengden så må $U_1 = -4\,m/s$. Dette gir en kinetisk energi som er $8\,J$. Dette er mindre enn $11\,J$.

Derfor må den røde bilen få en fart mot venstre litt større enn $4\,m/s$ og den blå bilen vil bevege seg (sakte) mot høyre etter kollisjonen.

La oss løse likningene og finne eksakte verdier:
(vi dropper enhetene for å gjøre regningen mer oversiktlig)

$$u_1 + 2u_2 = -4 \quad \text{og} \quad u_1^2 + 2u_2^2 = 22$$

$$u_1 = -4 - 2u_2 \quad \text{setter dette inn i} \quad u_1^2 + 2u_2^2 = 22:$$

$$(4 + 2u_2)^2 + 2u_2^2 = 16 + 16u_2 + 4u_2^2 + 2u_2^2 = 22.$$

Så $6u_2^2 + 16u_2 - 6 = 0$ deler med 2.

$\longrightarrow$

$$3u_2^2 + 8u_2 - 3 = 0$$

Dette gir løsningene : $u_2 = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 - 4(-3)\cdot 3}}{2 \cdot 3}$

$$u_2 = \frac{-8 \pm \sqrt{64+36}}{6} = \frac{-8 \pm 10}{6}$$

$$\underline{u_2 = -3} \quad \text{eller} \quad \underline{u_2 = \tfrac{1}{3}}$$

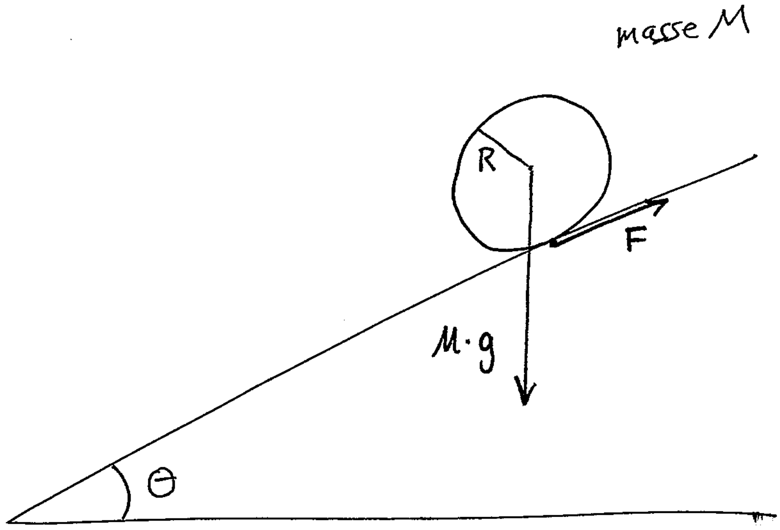
Etter kollisjonen er $u_2 = \frac{1}{3}\,\text{m/s}$ og

$$u_1 = -4\,\text{m/s} - 2 \cdot u_2$$

$$= -\left(4 + \tfrac{2}{3}\right)\text{m/s} = \underline{-\tfrac{14}{3}\,\text{m/s}}$$

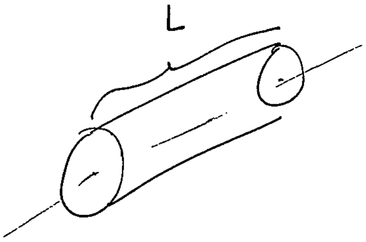
Etter kollisjonen beveger den røde bilen seg til <u>venstre</u> med fart <u>14/3 m/s</u> og den blå bilen beveger seg mot <u>høyre</u> med fart <u>$\frac{1}{3}$ m/s</u>.

2



a) Treghetsmomentet er $I = \int r^2 \rho \, dV$

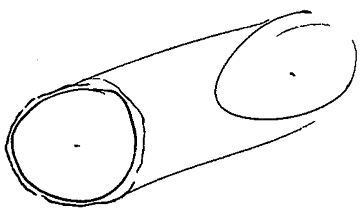
hvor r er avstanden fra rotasjonsaksen.



Volumet er $L \cdot \pi \cdot R^2$

Massen er jevnt fordelt og massetettheten er da $\rho = \frac{M}{L \cdot \pi \cdot R^2}$.

Vi deler opp sylinderen i sylinderskall:



Treghetsmomentet er

$$\rho \cdot L \cdot 2\pi \cdot r \cdot \Delta r \cdot r^2$$

når Δr er liten.

Totalt treghetsmoment for den massive sylinderen er derfor

$$\int_0^R (\rho \cdot L \cdot 2\pi \cdot r) \cdot r^2 \cdot dr$$

$$2\pi\rho L \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho \cdot L \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^R$$
$$= 2\pi\rho \cdot L \cdot \frac{R^4}{4}$$

$$I = 2\pi \cdot L \cdot \frac{M}{L \cdot \pi \cdot R^2} \cdot \frac{R^4}{4}$$
$$= \underline{\frac{M \cdot R^2}{2}}$$

b) Figuren og kreftene som virker på sylinderen er tegnet inn på forrige side.
F er friksjonskraften. Den overstiger ikke
$$\mu \cdot \underbrace{M \cdot g \cos\theta}_{}.$$
normal komponenten av gravitasjons kraften.

La α vere vinkel akselerasjonen til sylinderen. Siden sylinderen ruller så er akselerasjonen $a = R \cdot \alpha$ til massesenteret.

Kraft momentet er $R \cdot F = I \cdot \alpha$.
Vi får derfor at $F = \frac{I \cdot \alpha}{R} = \frac{I \cdot \alpha \cdot R}{R^2} = \frac{I \cdot a}{R^2}$

Ved Newtons andre lov er

$$M \cdot a = M \cdot g \sin\theta - F.$$

Så $$a = g \sin\theta - \frac{I \cdot a}{M \cdot R^2}$$

$$a\left(1 + \frac{I}{MR^2}\right) = g \sin\theta$$
$$\underline{a = \frac{g \sin\theta}{1 + I/MR^2}}$$

c) siden friksjonskraften F må vere mindre eller lik $\mu \cdot M \cdot g \cos\theta$, så må vinkelen θ vere slik at

$$F = \frac{I \cdot a}{R^2} = \frac{I}{R^2} \cdot \frac{g \sin\theta}{1 + I/MR^2} \leq \mu M g \cos\theta$$

$$\frac{\sin\theta}{MR^2/I + 1} \leq \mu \cos\theta$$

$$\tan\theta \leq \mu \left(1 + MR^2/I\right)$$

Den største vinkelen θ slik at sylinderen ruller og ikke sklir er

$$\theta = \arctan \mu\left(1 + \frac{MR^2}{I}\right)$$
$$= \underline{\arctan(3\mu)}.$$

d) Bevaring av energi gir at

$$\underbrace{\underset{\text{kinetisk energi til massesenteret}}{\tfrac{1}{2} M V^2} + \underset{\text{kinetisk energi til rotasjons bevegelse}}{\tfrac{1}{2} I \Big(\overset{= \omega \text{ vinkelfart.}}{\tfrac{V}{R}}\Big)^2}}_{\text{Total kinetisk energi ved Königs setning}} = \underset{\text{potensiell energi}}{d \cdot \sin\theta \cdot Mg}$$

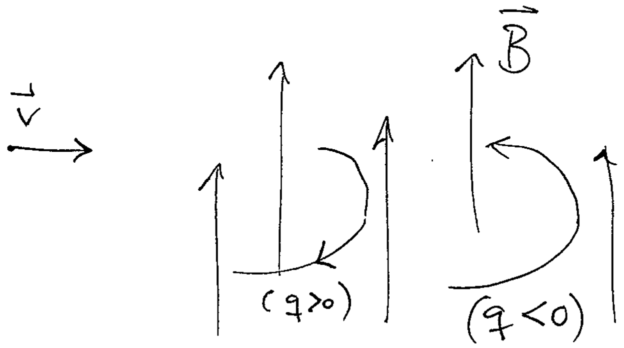
$$V^2 \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{I}{MR^2}\right) = d \sin\theta \cdot g$$

Farten til massesenteret er $\underline{V = 2\sqrt{\frac{g \cdot d \sin\theta}{3}}}$

Prøveeksamen del 2

13 mai 2009

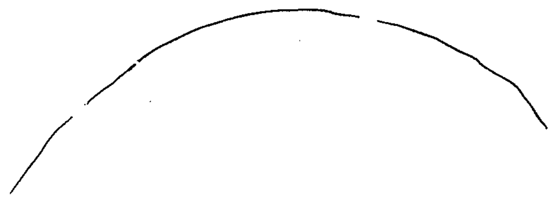
1 a)



Partikkelen vil bevege seg i sirkelbaner (spiralbaner generelt) i det homogene magnetfeltet.

$$\vec F = q \cdot \vec v \times \vec B$$

$|\vec F| = |q|\,|\vec v|\cdot|\vec B|$ siden $\vec v$ og $\vec B$ er ortogonale.

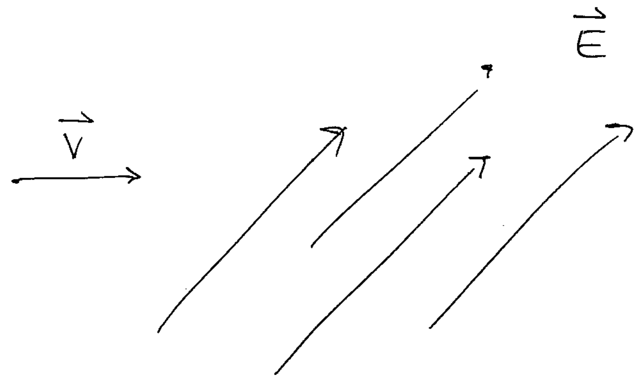


Farten endres ikke siden magnetkraften ikke utfører noe arbeid på partikkelen.

Akselerasjonen står vinkelrett på $\vec v$ og har konstant størrelse $a = \frac{|q|}{m} V \cdot B$. Banen blir derfor en sirkelbane med radius R slik at sentripetalakselerasjonen $\frac{V^2}{R}$ er $\frac{|q|}{m} V \cdot B$.

Dette gir $R = \left(\frac{|q|B}{mV}\right)^{-1} = \underline{\frac{mV}{|q|B}}$

b)



$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

Kraften er i retning $\vec{E}$ hvis q er positiv
———— $-\vec{E}$ ———— negativ.

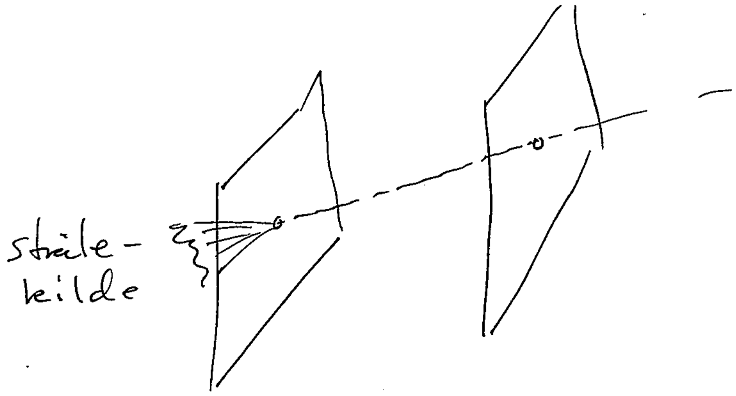
$$\vec{a} = \frac{q}{m} \cdot \vec{E} \quad \text{konstant.}$$

Hvis partikkelen er i posisjon $\vec{X}_0$ ved $t=0$
og har fart $\vec{V}_0$ så er
posisjonen ved tiden t (hvis partikkelen beveger seg i feltet):

$$\vec{X}(t) = \underline{\vec{X}_0 + \vec{V}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\frac{q}{m}\vec{E} \cdot t^2}$$

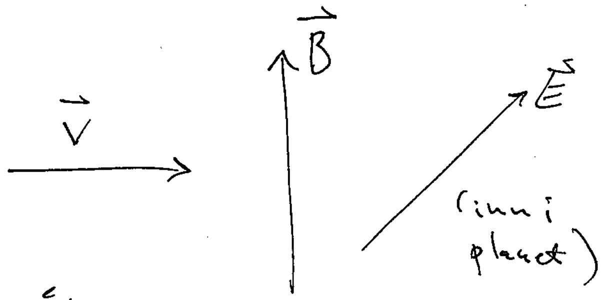
Dette er en parabelbane. ($\vec{V}_0$ ikke parallell til $\vec{E}$).

c)



Kreftene som virker på en partikkel med fart v som kommer inn i feltet er

$$\vec{F} = q\,(\vec{V} \times \vec{B} + \vec{E})$$



I dette tilfellet blir kraften

$$F = |\vec{F}| = |q| \, |V \cdot B - E|$$

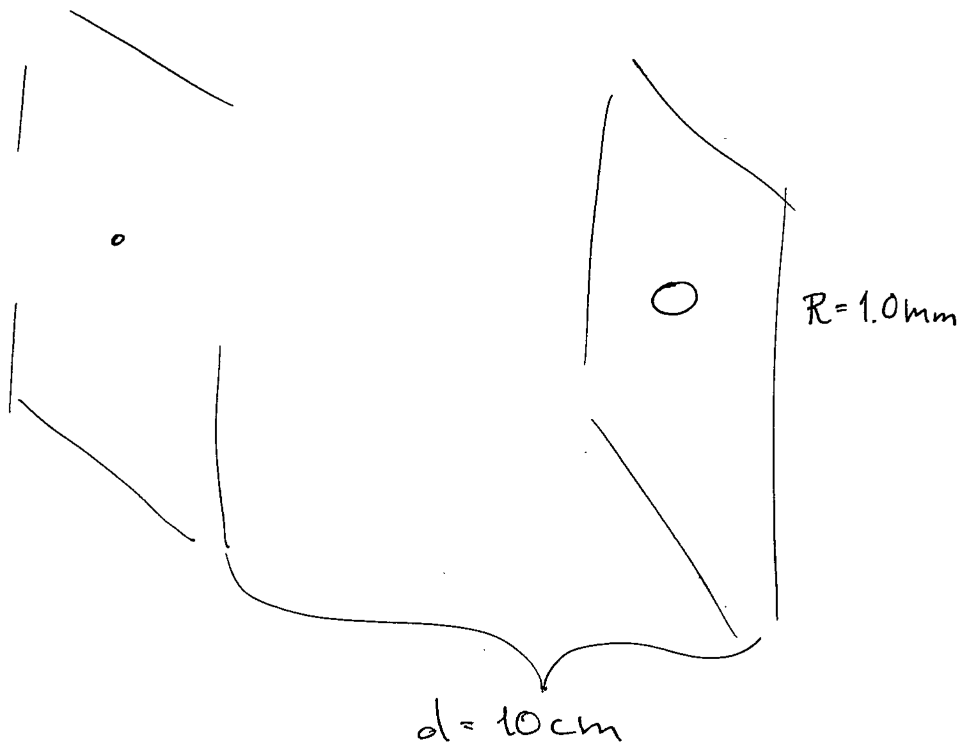
"($\vec{V}, \vec{E}, \vec{B}$) et høyrehands-system"

Kraften er $\vec{0}$ slik at partikkelen går rett frem og ut gjennom hullet i den andre platen hvis

$$V \cdot B - E = 0.$$

$$\underline{V = \frac{E}{B}}$$

d) $V = 10^6\, m/s$



$B = 1.0\, mT$

Fra c) må E være slik at $V = \frac{E}{B}$.

$m = 9.11 \cdot 10^{-31}\, kg$

$q = 1.60 \cdot 10^{-19}\, C$

La ΔV være et lite avvik i farten. $(\Delta V \ll V)$

Tiden det tar å passere feltet er omtrent

$$T = \frac{d}{V}.$$

Kraften som virker på partikkelen er

$$\vec{F} = q(\vec{V} \times \vec{B} + \vec{E}) \simeq q(\Delta\vec{V} \times \vec{B})$$

$(\Delta\vec{V}$ er i retning $\vec{V})$

Kraften er vinkelrett på $\vec{V}$. forflytning bort fra sentrum av disken er:

$$\Delta S = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{q \cdot B \cdot \Delta V}{m} \right) \cdot \left(\frac{d}{V}\right)^2$$

$$= \frac{q}{m} \cdot \frac{B \cdot d^2}{2V} \cdot \frac{\Delta V}{V}$$

For at ΔS skal være mindre enn 1mm

må $\frac{\Delta V}{V} \leq 1\text{mm} \cdot \frac{m_e}{q_e} \cdot \frac{2V}{B \cdot d^2}$

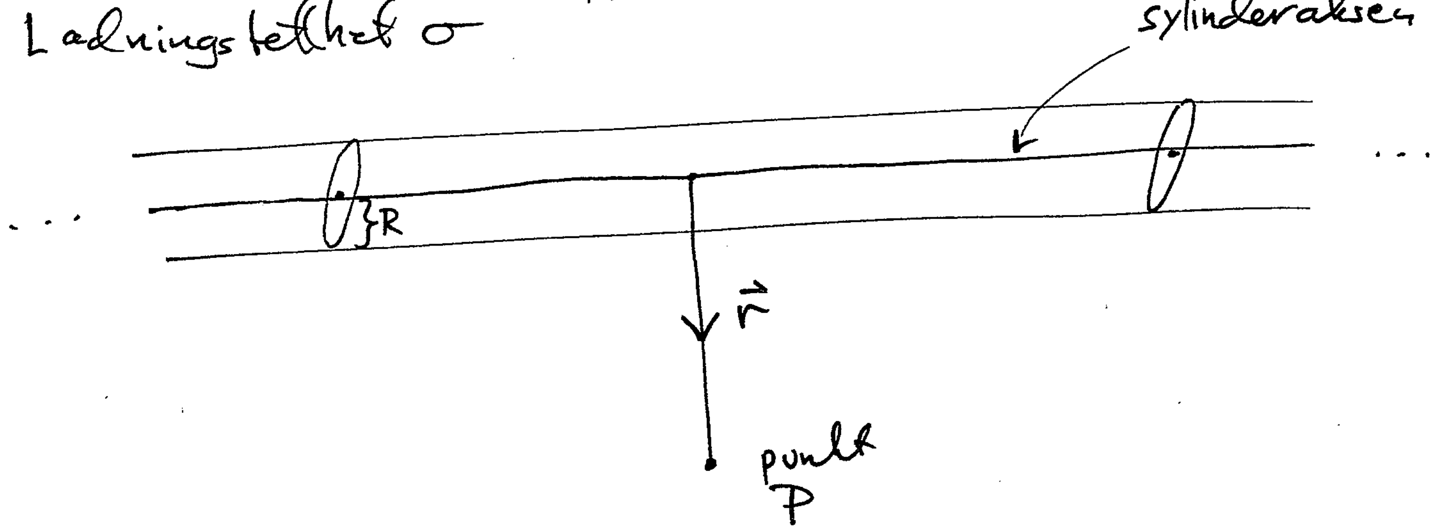
$$0.001\text{m} \cdot 5.7 \cdot 10^{-12}\,\text{kg}\,C^{-1} \cdot \frac{2 \cdot 10^6\,\text{m/s}}{10^{-3}\,T \cdot (0.1\,\text{m})^2}$$

$$\frac{\Delta V}{V} \leq 11.4 \cdot 10^{-3-12+6+3+2} \frac{\text{kg}\,C^{-1}\,s^{-1}}{T}$$

$$\frac{\Delta V}{V} \leq 1.1 \cdot 10^{-3}.$$

Elektronene kan ha et avvik på omtrent 0.1 % fra V og fremdeles slippe gjennom hullet i plata.

Oppgave 2



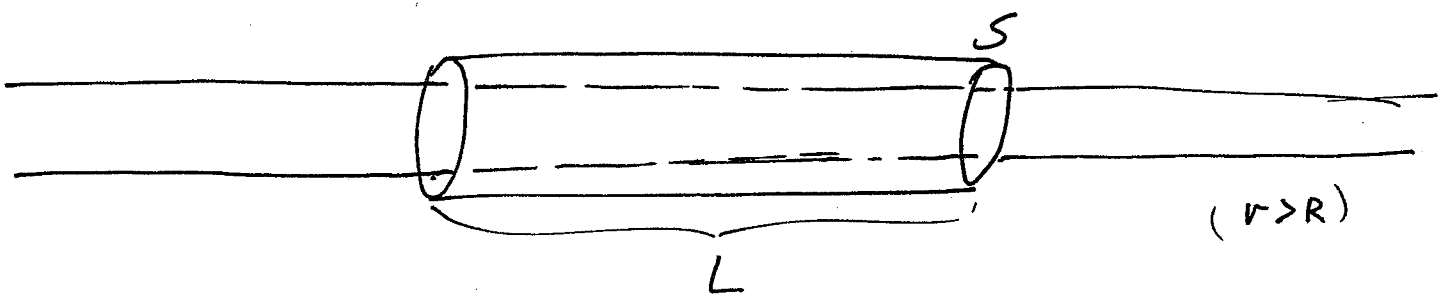
Vi argumenterer først for at det elektriske feltet $\vec{E}$ er parallell til $\vec{r}$ og at $|\vec{E}| = E$ bare avhenger av $r = |\vec{r}|$.

Ved å rotere røret $180°$ om $\vec{r}$ blir det elektriske feltet uendret på grunn av symmetrien til røret. Komponenten til $\vec{E}$ vinkelrett på $\vec{r}$ skifter fortegn under rotasjonen. Vi konkluderer med at komponenten til $\vec{E}$ vinkelrett på $\vec{r}$ er $\vec{0}$. Derfor er $\vec{E}$ parallell med $\vec{r}$.

Siden sylinderen er uendelig lang og symmetrisk under rotasjon rundt sylinderaksen så avhenger $|\vec{E}|$ bare av $r = |\vec{r}|$

Argumentet er likefult gyldig når $r < R$.

Vi velger en (abstrakt) lukket flate S som er en sylinder med radius r og samme sylinderakse som den ladde sylinderen, og med disker på endene. La lengden være L



(r > R)

Gauss' lov sier at

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

hvor Q er ladningen inni flaten S.
Normalvektoren til flaten peker utover, $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ på sylinderen

Hvis $\vec{E} = E' \cdot \vec{r}/r$ ($\vec{E}$ er parallell til $\vec{r}$),

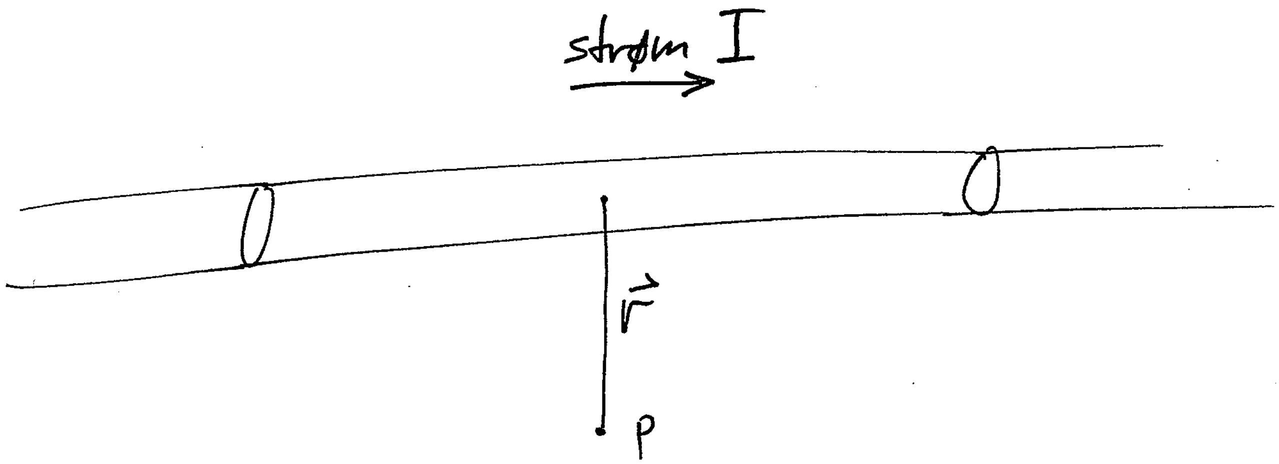
så får vi $\quad 2\pi \cdot r \cdot L \cdot E' + 0 = \frac{Q}{\epsilon_0}$

Flate integralet over ende-diskene er 0 siden $\vec{n}$ da står vinkelrett på $\vec{r}$.

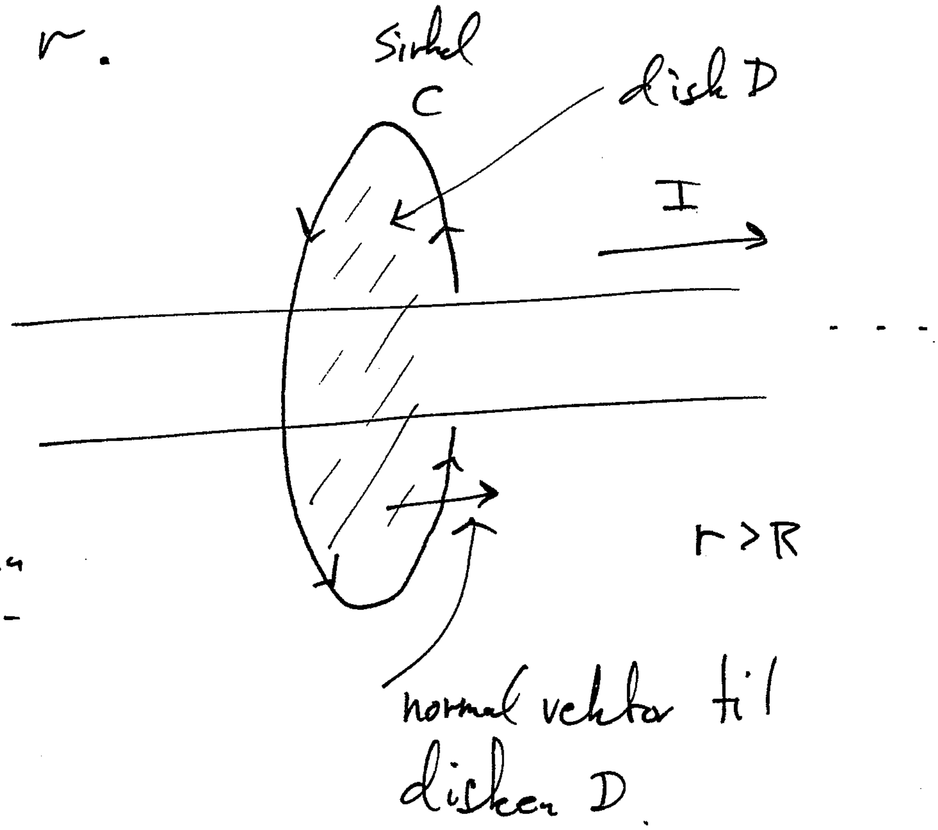
Hvis $r > R$ så er $Q = 2\pi \cdot R \cdot L \cdot \sigma$

Hvis $r < R$ så er $Q = 0$

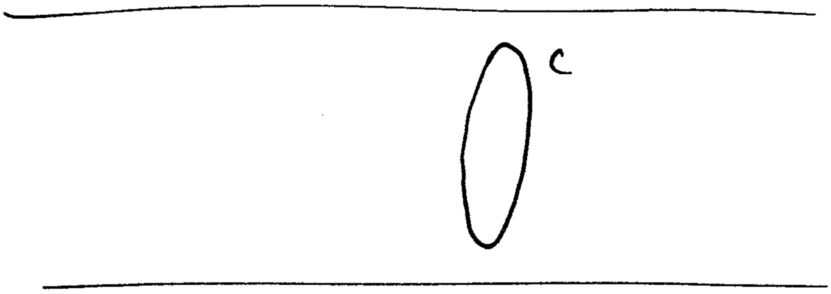
Dette gir $\quad \vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma R}{\epsilon_0 r^2} \vec{r} & r > R \\ \vec{0} & r < R \end{cases}$



Hvis vi roterer røret 180° om $\vec{r}$ svarer det til å snu retningen på strømmen. Dette gir motsatt retning på magnetfeltet. Derfor er komponenten til magnetfeltet i retning $\vec{r}$ lik $\vec{0}$. Ved Biot-Savart sin lov så er magnetfeltet $\vec{B}$ også vinkelrett på strømmeretningen. Sylinderen er vendelig lang og symmetrisk under rotasjon om sylinderaksen så $|\vec{B}| = B$ avhenger bare av r.



Velger orienteringen slik at normalvektoren til D er i retningen til strømmen.



$r<R$

Amperes lov (fluksen $\int_D \vec{E}\cdot\vec{n}\, dA$ er konstant):

$$\int_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I'$$

hvor I' er den el. strømmen gjennom D.

Dette gir

$$2\pi r \cdot B = \begin{cases} \mu_0 \cdot I & r>R \\ 0 & r<R \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & r>R \\ 0 & r<R \end{cases}$$

---

hvor $\vec{B}$ har retning som anvist på figuren på forrige side (høyre hånds regelen).