14sep 2020

Reelle polynomer faktoriseres entydig

1. som produkt av lineære og kvadratiske faktorer (de har ingen reelle røtter)

Eksempel

$$x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1)$$
$$= \underline{(x^2+1)(x+1)(x-1)}$$

$$x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}\cdot x)^2$$

ingen røtter.

(Konjugatsetningen $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$)

$$x^4+1 = \underline{(x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)}$$

Oppg Faktoriser x^4+x^2+1 (≥ 1 for alle x)

$$x^4+1+x^2 = (x^2+1)^2 - 2x^2 + x^2$$
$$= (x^2+1)^2 - x^2 \quad \text{konj.set.}$$
$$= \underline{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$

② Faktoriser $q(x) = x^3 - 13x + 12$

Resultat $\quad x - c$ deler $q(x) \Leftrightarrow q(c) = 0$

Resten under pol. div $\dfrac{q(x)}{x-c}$ er $\dfrac{q(c)}{x-c}$

$$\frac{q(x)}{x-c} = s(x) + \frac{r}{x-c} \quad \text{pol.div}$$

$$q(x) = s(x)\cdot(x-c) + r$$

Setter $x = c$ gir $q(c) = r$

"Ser at $x = 1$ er en rot"

Da vil $x - 1$ dele $q(x)$

$$x^3 - 13x + 12 : x - 1 = x^2 + x - 12$$

$$\underline{x^3 - x^2}$$

$$x^2 - 13x + 12$$

$$\underline{x^2 - x}$$

$$-12x + 12$$

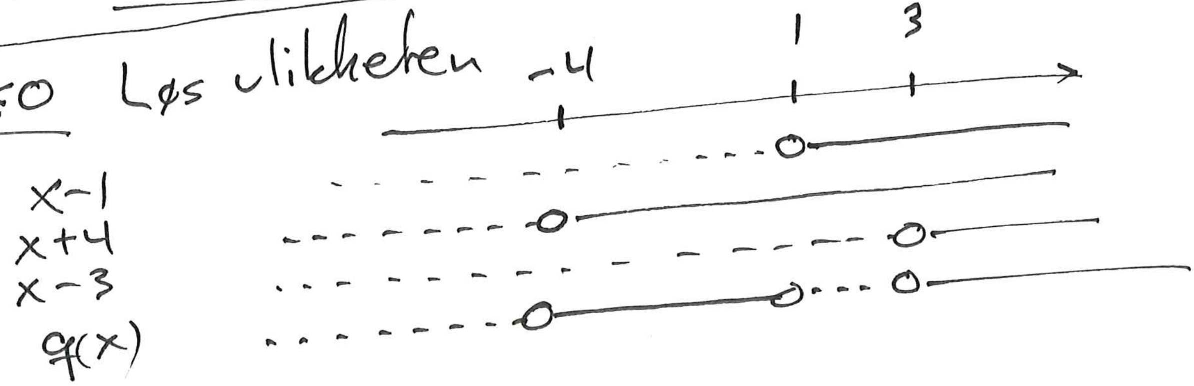
$$q(x) = (x-1)(x^2 + x - 12)$$

$$q(x) = (x-1)(x+4)(x-3)$$

Løsningsmengda til $q(x) \leq 0$

$\langle -\infty, -4] \cup [1, 3]$

$q(x) \leq 0$ Løs ulikheten



Kan $p(x) = x^4 + 2x^3 - 13x + 2$ deles av $x-2$? Nei

Dette er mulig $\Leftrightarrow$ $P(2) = 0$

(3) $P(2) = 2^4 + 2\cdot 2^3 - 13\cdot 2 + 2$

$32 - 26 + 2 = 8 \neq 0$

ikke mulig

Kan $q(x) = x^4 + 2x^2 - 13x + 2$ deles av $x=2$? ja

$q(2) = 2^4 + 2\cdot 2^2 - 13\cdot 2 + 2$

$16 + 8 + 2 - 26 = 26 - 26 = \underline{0}$

---

irrasjonale likninger. Eksempler.

1) $x - 4 = \sqrt{x+5}$

2) $3 - x = \sqrt{x-1}$

3) $\sqrt{x} = 6 - x$

4) $\sqrt{x+1} = x - 5$

5) $2 + \sqrt{x} = \sqrt{3x-2}$

Teknikk: kvadrerer begge sider for å bli kvitt rottegnet.

$a = b \overset{\text{impliserer}}{\Rightarrow} a^2 = b^2 \Leftrightarrow |a| = |b|$

$\Updownarrow$ ekvivalente

$a = b$ eller $\underline{a = -b}$.

Ekte løsninge

Falske løsninger.

2) $3 - x = \sqrt{x-1}$

kvadrerer $(3-x)^2 = x - 1$

$x^2 - 6x + \cancel{8}^2 = x - 1$

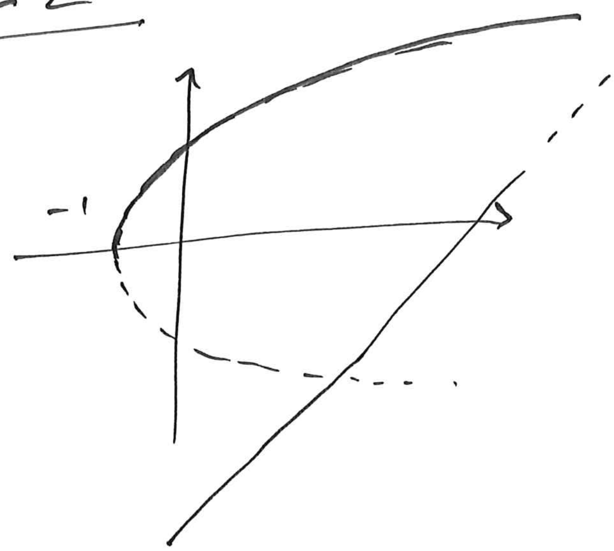
4 $x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x-2)(x-5) = 0$ $\quad x = 2, 5$

Tester: $x = 2$ VS: $3 - 2 = 1$ HS $= \sqrt{2-1} = 1$ ✓

$x = 5$ VS: $3 - 5 = -2$ HS $= \sqrt{5-1} = 2$

Løsningen er $\underline{x = 2}$



opg. 16.

4) $\sqrt{x+1} = x - 5$

Kvadrerer på begge sider av likhetstegnet

$\Rightarrow x + 1 = (x-5)^2$

$x + 1 = x^2 - 10x + 25$

$x^2 - 11x + 24 = 0$

$(x-3)(x-8) = 0$

$x = 3$ og $x = 8$

sjekker for falske løsninger

$x = 3$ VS $= \sqrt{3+1} = 2$ HS $= 3 - 5 = -2$ Falsk

$x = 8$ VS $= \sqrt{8+1} = 3$ HS $= 8 - 5 = 3$ ✓

Løsningen er $\underline{x = 8}$

1. $\underbrace{x-4}_{a} = \underbrace{\sqrt{x+5}}_{b}$

Kvadrerer : $(x-4)^2 = \left(\sqrt{x+5}\right)^2 = x+5$

2. gradslikning $x^2 - 8x + 16 = x + 5$

$x^2 - 9x + 11 = 0$

5

ABC : $x = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-44}}{2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{37}}{2}$.

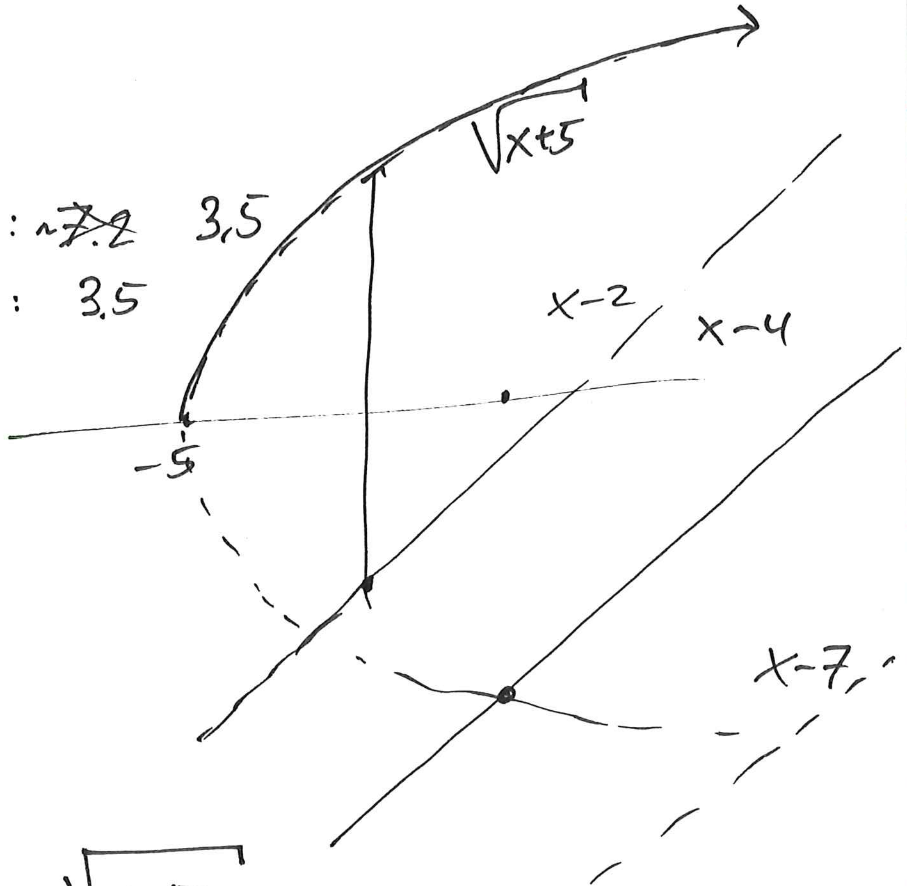
$\dfrac{9-\sqrt{37}}{2}$ Falsk

VS : $\sim$ ~~7.2~~ 3,5

HS : 3,5

$\dfrac{9+\sqrt{37}}{2}$

Ikke løsning.



Løsningen er

$x = \dfrac{9+\sqrt{37}}{2}$

oppg. $x - 7 = \sqrt{x+5}$

kvadrerer $(x-7)^2 = x+5$

$x^2 - 14x + 49 = x + 5$

$x^2 - 15x + 44 = 0$

$(x - \cancel{5}4)(x-11) = 0$ $x = 4$ og $x = 11$

Tester : setter inn 4 : $VS = 4-7 = -3$, $HS = \sqrt{4+5} = 3$ Falsk

11 : $VS = 11-7 = 4$ $HS = \sqrt{11+5} = 4$ ✓

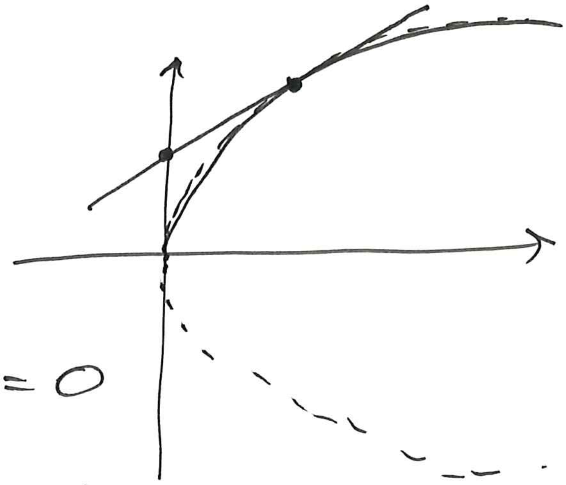
Løsningen er $\underline{x = 11}$

Løs $\quad 2\sqrt{x} = x+1$

$$\Rightarrow \left(2\sqrt{x}\right)^2 = (x+1)^2$$

$$4x = x^2+2x+1$$

$$x^2+2x-4x+1 = 0$$



(6)

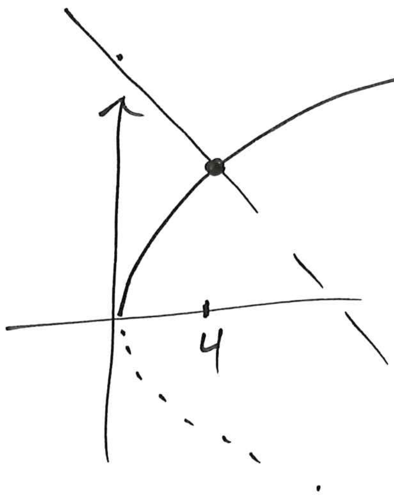
$$x^2-2x+1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1.$$

sjekker: $\quad$ VS $2\sqrt{1} = 2$, HS $= 1+1 = 2$ ✓

Løsningen er $\underline{x = 1}$



3) $\sqrt{x} = 6-x$

kvadrerer

$$x = (6-x)^2 = 36-12x+x^2$$

$$x^2-13x+36 = 0$$

$$(x-9)(x-4) = 0 \qquad x=4 \text{ og } x=9$$

sjekker: $\quad x=4 \quad$ VS $= \sqrt{4} = 2$, HS $= 6-4 = 2$ ✓

$x=9 \quad$ VS $= \sqrt{9} = 3$, HS $= 6-9 = -3$ ✗ Feil

Så løsningen er $\underline{x=4}$

5)

$$\underbrace{2+\sqrt{x}}_{a} = \underbrace{\sqrt{3x-2}}_{b}$$

$$\Rightarrow \left(2+\sqrt{x}\right)^2 = 3x-2$$

$$4+x+4\sqrt{x} = 3x-2$$

$$4\sqrt{x} = 3x-x-2-4$$

7

$$4\sqrt{x} = 2x-6$$

$$\Downarrow$$

$$\left(4\sqrt{x}\right)^2 = (2x-6)^2$$

$$16x = \left(2(x-3)\right)^2 = 4(x^2-6x+9)$$

deler med 4

$$4x = x^2-6x+9$$

$$x^2-10x+9 = 0$$

$$(x-9)(x-1) = 0$$

$x=9$ og $x=1$.

sjekker for falske løsninger

$x=9$ ✓

$x=1$ $VS = 2+\sqrt{1} = 3$, $HS = \sqrt{3\cdot 1-2} = \sqrt{1} = 1$ Falsk

Løsningene til $2+\sqrt{x} = \sqrt{3x-2}$

er $\underline{x=9}$

⑧ Doble ulikheter

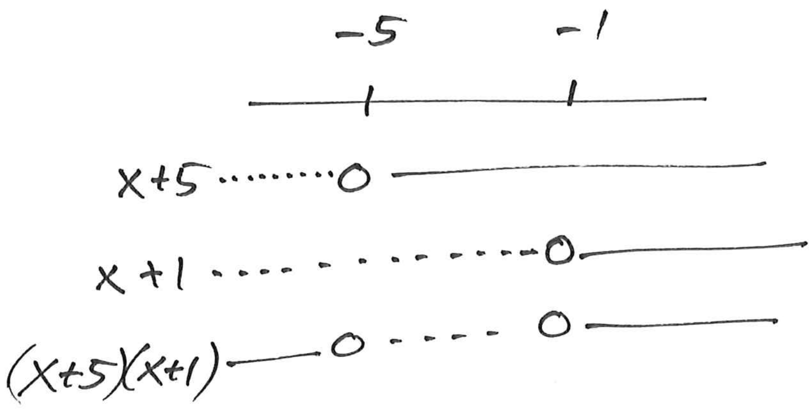
$$x^2+7x+2 < x-3 \leq -x^2+9$$

$\Leftrightarrow$ 1) $x^2+7x+2 < x-3$ $\Leftrightarrow$ $x^2+6x+5<0$

og 2) $x-3 \leq -x^2+9$ $\Leftrightarrow$ $x^2+x-12 \leq 0$

1) $x^2+6x+5<0$

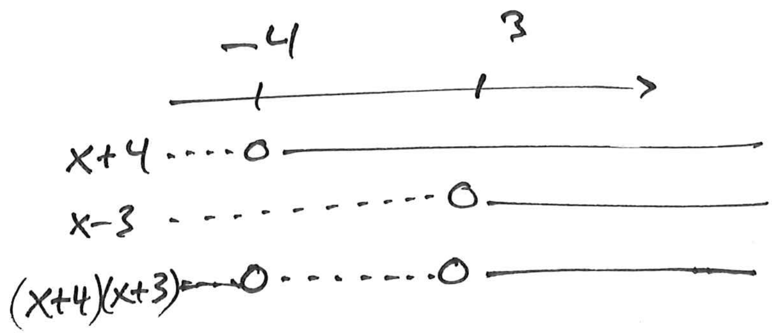
$(x+5)(x+1)<0$



$\langle -5, -1 \rangle$

2) $x^2+x-12 \leq 0$

$(x+4)(x-3) \leq 0$



$[-4, 3]$

Felles løsninger til de to ulikhetene er

$\langle -5, -1 \rangle \underset{=\text{snitt}}{\cap} [-4, 3] = [-4, -1\rangle$