5.02.2020

e^x eksponentfunksjonen definert for $x \in \mathbb{R}$

e Eulertallet $e \sim 2.718281828 45\ldots$

e^x skrives også $\exp(x)$

$$(e^x)' = e^x$$

e^x er økende for alle x og har da en invers funksjon $\ln x$.

$$\underset{x>0}{e^{\ln x} = x} \qquad \text{og} \qquad \underset{\text{alle } x}{\ln e^x = x}$$

$\ln x$ naturlig logaritme. Definert for $x > 0$

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases} \qquad \text{for} \quad x \neq 0$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \qquad \text{for} \quad x \neq 0$$

$$a = e^{\ln a} \qquad \text{så} \qquad a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)\cdot x}$$

$$\text{og} \qquad \operatorname{Log}_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad \begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix}$$

Dette gir:

$$(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x \qquad \text{alle } x$$

$$(\operatorname{Log}_a(x))' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}. \qquad x > 0$$

Eks Deriver $3e^{-2x}$, e^{x^3}, $\sqrt{e^x}$

$$(3e^{-2x})' = 3(e^{-2x})' = 3e^{-2x}(-2x)'$$
$$= \underline{-6e^{-2x}}$$

$$(e^{x^3})' = e^{x^3}\cdot(x^3)' = 3x^2 e^{x^3}$$

$$\sqrt{e^x} = (e^x)^{1/2} = e^{x/2}$$
$$(e^{x/2})' = e^{x/2}\cdot\left(\tfrac{x}{2}\right)' = \underline{\tfrac{1}{2}e^{x/2}}$$

Oppg Deriver 2^{-x}, $\ln|x^3-8|$ $x \neq 2$

$\ln\left(\frac{x}{x^3-1}\right)$, $\frac{1}{\ln(x)}$

1) $2 = e^{\ln 2}$ så $2^{-x} = (e^{\ln 2})^{-x} = e^{-x\cdot\ln 2}$

$$(2^{-x})' = (e^{-x\ln 2})(-x\ln 2)'$$
$$= \underline{-\ln 2\cdot 2^{-x}}$$

2) $(\ln|x^3-8|)' = \frac{1}{x^3-8}(x^3-8)' = \frac{3x^2}{x^3-8}$

3) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^3-1}\right) = \ln|x| - \ln|(x^3-1)|$

(def. for $x>1$ og $x<0$), $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3-1}(x^3-1)' = \underline{\frac{1}{x} - \frac{3x^2}{x^3-1}}$

4) $\left(\frac{1}{\ln x}\right)' = \left((\ln x)^{-1}\right)' = (-1)(\ln x)^{-2}\cdot(\ln x)'$
$$= \underline{\frac{-1}{x(\ln x)^2}}$$

Uttfyllende eksempler

$* \quad (e^{x})' = e^{x}$

$u(x) = -x$

$u'(x) = -1$

$$(e^{-x})' = (e^{u(x)})'$$

$$= e^{u(x)} \cdot u'(x) \quad \text{kjerneregelen}$$

$$= e^{-x} \cdot (-1)$$

$$\underline{(e^{x})' = -e^{-x}}$$

$u = -13x + 2$

$u' = -13$

$$* \quad \left(e^{-13x+2}\right)' = \left(e^{u(x)}\right)'$$

$$= (e^{u(x)}) \cdot (u(x))' = e^{-13x+2} \cdot (-13)$$

$$= \underline{-13 e^{-13x+2}}$$

$$\left(e^{7x+1}\right)' = e^{7x+1} \cdot (7x+1)'$$

$$= \underline{7 e^{7x+1}}$$

$10 = e^{\ln 10}$

$$* \quad (10^{-x})'$$

$$\left(\left(e^{\ln 10}\right)^{-x}\right)' = \left(e^{\ln 10 \cdot (-x)}\right)' = \left(e^{(-\ln 10) \cdot x}\right)'$$

$$= e^{-\ln 10 \cdot x} \left(-\ln(10) \cdot x\right)'$$

$$= 10^{-x} \left(-\ln(10)\right) = \underline{-\ln(10) \cdot 10^{-x}}$$

Ht. owk $\quad \overline{(10^{x})' = \ln(10) \cdot 10^{x}}$

$$(10^{u(x)})'$$

$u(x) = -x$

$u'(x) = -1$

$$= \ln(10)\, 10^{u} \cdot u'(x)$$

$$= \underline{-\ln(10) \cdot 10^{x}}$$

Logaritmisk skala

Bel enhet til $\operatorname{Log} \frac{E_2}{E_1}$ $\qquad$ E_1, E_2 effekter

desiBel $= \frac{1}{10}$ Bel $\qquad$ (desiLiter $= \frac{1}{10}$ Liter)

desibel : $10 \operatorname{Log}(E_2/E_1)$.

Lyd : Effekt / m^2 proporsjonalt til P^2
P lydtrykk.

Referanse lyd

$P_0 = 20 \mu$ Pascal $\left(\mu \text{ mikro} = 10^{-6}\right)$
(svakeste hørbar lyd ved 1kHz)

Lydstyrke : $10 \operatorname{Log}\left(P^2/P_0^2\right)$ dBel

$= 10 \operatorname{Log}\left(P/P_0\right)^2$ dBel

$= \underline{20 \operatorname{Log}\left(P/P_0\right) \text{ dBel}}$.

En dobling av lydtrykket gir en økning

på $20 \operatorname{Log} 2$ dBel $\sim (6.0206\ldots)$ dBel

$\sim \underline{6 \text{ dBel}}$.

Menneskenes hørsel fungere fra 0 dBel → 120 dBel

Området svarer til 20 steg av 6 dBel.

$$\frac{P}{P_0} = 2^{20} = (2^{10})^2 = (1024)^2 \approx \underline{10^6}$$

Forholdet mellom lydtrykket til en sterk og en veldig svak lyd er $\approx \underline{10^6}$!

Finn ekstremalpunkt og vendepunkt til $f(x) = e^{-x^2}$.

$$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2x e^{-x^2}$$

$f'(x) > 0$ for $x < 0$

$f'(x) < 0$ for $x > 0$

toppunkt: $(0, f(0)) = (0, 1)$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{n \to \infty} e^{-n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{e^n} = 0$$

så x-aksen er en horisontal asymptote.

$$f''(x) = \left(-2x e^{-x^2}\right)' = \underbrace{(-2x)'}_{-2} e^{-x^2} + (-2x)\underbrace{\left(e^{-x^2}\right)'}_{-2x e^{-x^2}}$$

$$f''(x) = -2 e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} = (2x^2 - 1) \cdot 2 e^{-x^2}.$$

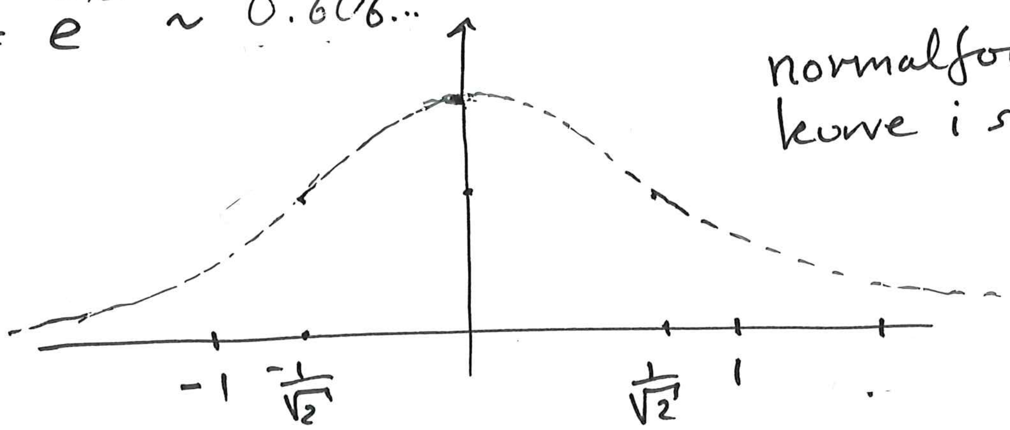
$f''(x) < 0$ for $x \in \langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$ konkav ned

$f''(x) > 0$ for $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f(x)$ er konkav opp (konveks) for $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$

og for $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$f\left(\pm \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1/2} \sim 0.606\ldots$$



normalfordelings-kurve i statistikk

Eksponentiell og polynomiell vekst

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

Deriverer $\quad f(x) = \frac{x^n}{e^x} = x^n e^{-x}$

$$f'(x) = (x^n)' \cdot e^{-x} + (x^n)(e^{-x})'$$
$$= n x^{n-1} e^{-x} + x^n(-e^{-x})$$
$$= x^{n-1} e^{-x} (n - x)$$

$f'(x) > 0 \quad x < n \qquad f'(n) = 0$

$f'(x) < 0 \quad x > n.$

toppunkt i $\quad \frac{n^n}{e^n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad$ største verdi til $\frac{x^n}{e^x}$.

$$\frac{x^n}{e^x} = \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\left(\frac{x^{n+1}}{e^x}\right)}_{\text{begrenset}}$$

$\left(n \sim 27 \text{ er } \left(\frac{n}{e}\right)^n \sim 10^{27} \right)$

så $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad$ for alle n.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$$

$\Big($ La $x = 10^{-n} = e^{-n\cdot\ln 10}$

$x \ln x = 10^{-n} \cdot (-n \cdot \ln 10)$

$= \frac{-n}{10^n} (\ln 10)$

$\to 0$ når $n \to \infty \Big)$

Funksjonsdrøfting

(2) La $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $\quad x > 0$

* nullpunkt
* ekstremalpunkt
* vendepunkt
* asymptoter.

$$f'(x) = \left(\ln x \cdot \frac{1}{x}\right)'$$

$$= (\ln x)' \cdot \frac{1}{x} + (\ln x) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + \ln x \left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}(1 - \ln x) = \underline{\frac{1 - \ln x}{x^2}}$$

$$f''(x) = (f'(x))' = \left((1-\ln x) \cdot \frac{1}{x^2}\right)'$$

$$= (1 - \ln x)' \cdot \frac{1}{x^2} + (1 - \ln x) \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)'$$

$$= \left(\frac{-1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} + (1 - \ln x) \cdot \left(\frac{-2}{x^3}\right)$$

$$= \frac{-1}{x^3} + \frac{-2(1 - \ln x)}{x^3}$$

$$f''(x) = \underline{\frac{2\ln x - 3}{x^3}}$$

Nullpunkt: $\quad f(x) = 0$ $\qquad \ln x = 0$

$$x = e^{\ln x} = e^0 = 1$$

$f(x)$ har nullpunktet $\underline{x = 1}$.

Ekstremalpunkt: $\quad f'(x) = 0$, $\qquad 1 - \ln x = 0$

$$\ln x = 1$$

$$x = e^{\ln x} = e^1 = e$$

Kritisk punkt: $x = e$. $\qquad \left(f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}\right)$

$$f''(e) = \frac{2\ln e - 3}{e^3} = \frac{2 - 3}{e^3}$$

$$= \frac{-1}{e^3} < 0 \quad (\text{Konkav ned})$$

Toppunkt:

$$\underline{\left(e, \frac{1}{e}\right)}$$

Vendepunkt: $f''(x)$ eksisterer for alle $x > 0$.

$f''(x) = 0$.

3

$$2\ln x - 3 = 0$$

$$\frac{\cancel{2}\ln x}{\cancel{2}} = \frac{3}{2}$$

$$\ln(x) = 3/2$$

$$x = e^{\ln x} = e^{3/2} = e^{1+1/2}$$

$$= e^1 \cdot e^{1/2} = \underline{e\sqrt{e^1}}$$

nevneren x^3 til $f''(x)$ er positiv

$\ln x$ er en økende funksjon

Derfor er $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$ negativ for $0 < x < e^{3/2}$
positiv for $x > e^{3/2}$

$$f(e^{3/2}) = \frac{\ln(e^{3/2})}{e^{3/2}} = \frac{3/2}{e^{3/2}} = \underline{\frac{3}{2\sqrt{e^1}\cdot e}}$$

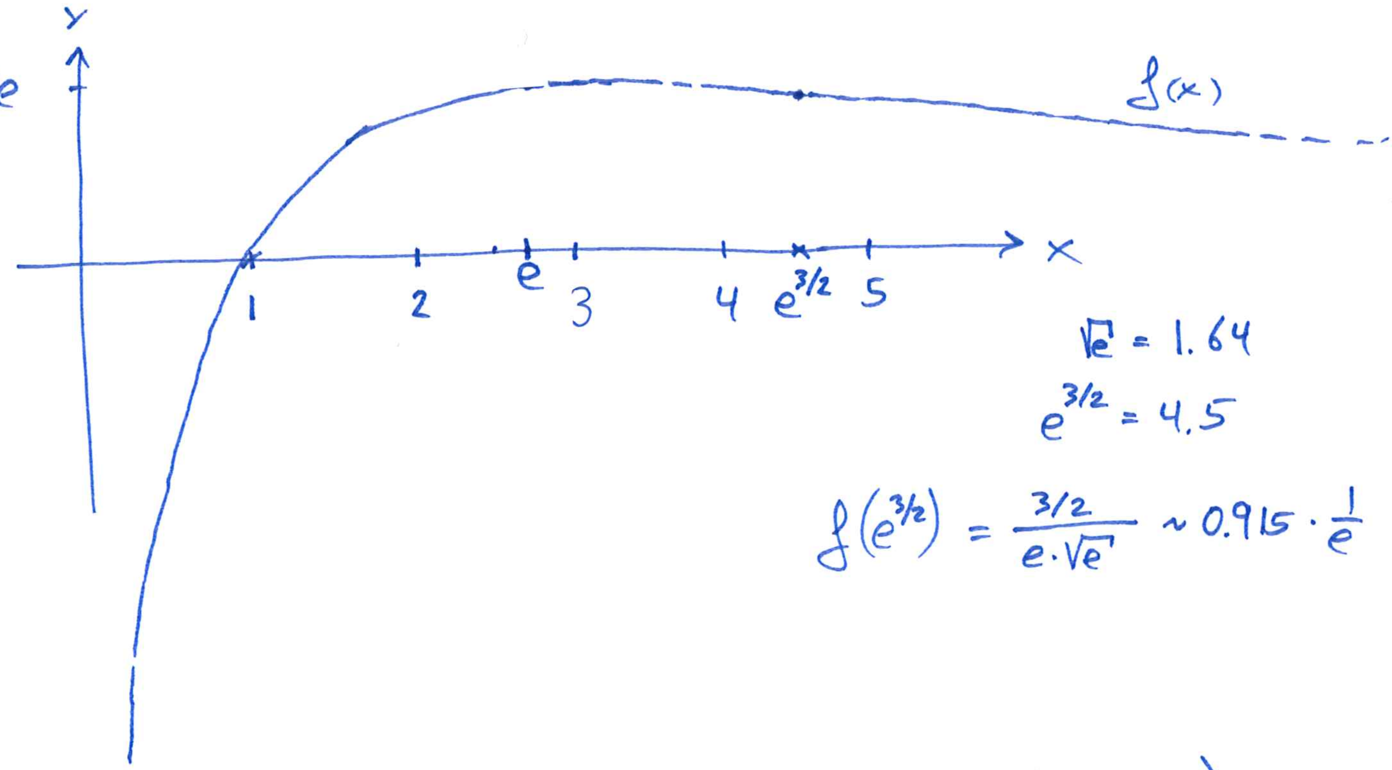
Punktet $\left(e^{3/2}, \dfrac{3}{2e^{3/2}}\right)$ er et vendepunkt.

Asymptoter: Horisontal asymptote $y = 0$ (x-aksen)
siden $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot \ln x = -\infty$$

Så $x = 0$ (y-aksen) er en vertikal asymptote.

4



$\sqrt{e} = 1.64$

$e^{3/2} = 4.5$

$$f(e^{3/2}) = \frac{3/2}{e\cdot\sqrt{e}} \approx 0.915 \cdot \frac{1}{e}$$

Digresjon : $$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} \cdot (\text{antall primtall} \le n) = 1.$$

Primtallsteoremet.

Eks. $n = 10^9$ (en milliard)

$\ln n = \ln 10^9 = 9 \cdot \ln 10 \approx 9\cdot(2.30) \approx 20.7.$

Blant de milliard første positive heltall er omtrent ett av tjue tall primtall.

(5%)