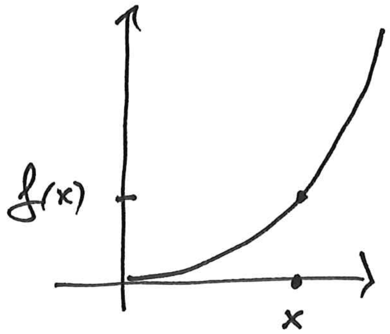
7.7 Omvendte funksjoner (inverse funksjoner)

29.01.2020
Fauck

① f injektiv

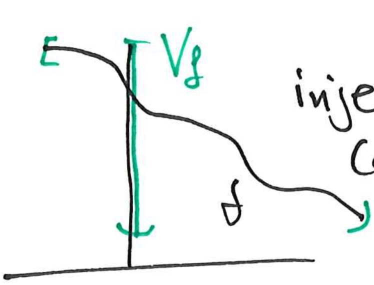


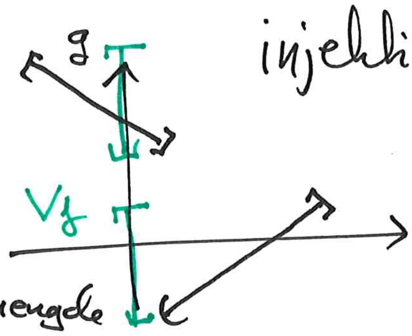
$f(x)$ er injektiv (en-til-en) hvis

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$f(x)$ (på ~~et~~ intervall) er injektiv hvis den er økende / avtagende (på intervallet)

Eks





Definisjonsmengde

Verdimengden til $f(x)$, D_f er alle mulige verdier til $f(x)$, D_f : $V_f = \{ f(x) \mid x \in D_f \}$

Anta $f(x)$, D_f er injektiv. Omvendt funksjon f^{-1} har definisjonsmengde V_f og er gitt ved

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{slik at } f(x) = y$$

②

$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ vell definert siden f er injektiv.

$D_{f^{-1}} = V_f$ og $V_{f^{-1}} = D_f$

$f \circ f^{-1} = id$ (på V_f)

$f^{-1} \circ f = id$ (på V_f)

hvor ($id(x) = x$)

Eks $y = x^3$

stigende så injektiv

$y' = 3x^2 > 0 \quad x \neq 0$

lik 0 når $x = 0$

inversfunksjonen er $\sqrt[3]{x}$

siden $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x = id(x)$

$y = ax + b$

$a \neq 0$

$a > 0$ stigende
$a < 0$ avtagende } injektiv

Vi finner inversfunksjonen (uttrykker x ved hjelp av y)

$y - b = a \cdot x$

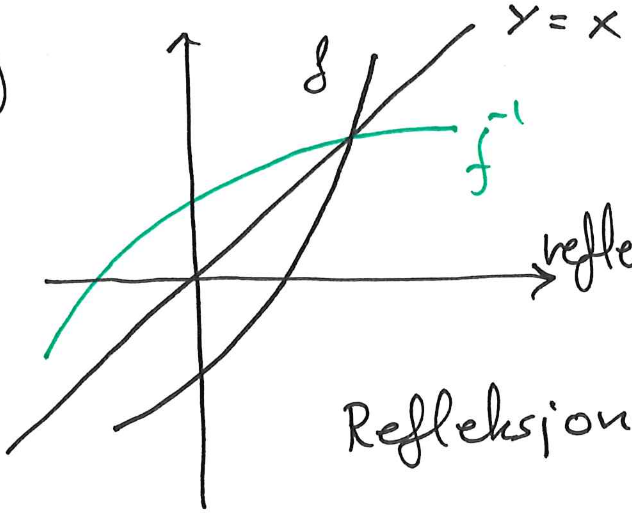
deler med a

$\underline{x = \dfrac{y-b}{a}}$ inversfunksjonen.

Hvis $f(x) = ax + b$, da er $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$

(tegnet opp i geogebra)

3

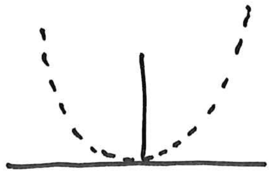


Grafen til f^{-1} er grafen til f reflektert om linjen $y = x$

Refleksjonen bytter x og y-aksene...

Eks

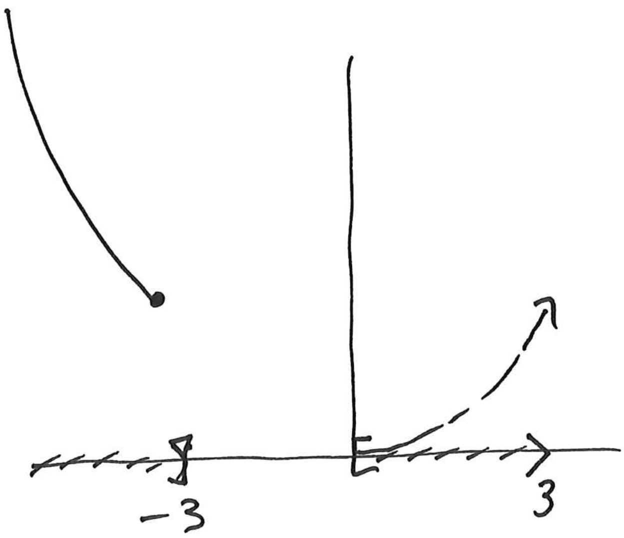
$y = x^2$



Avgrense $y = x^2$ til ~~et~~ mindre område hvor den er injektiv

$y = x^2$ $\quad x \geq 0$ (økende $y' = 2x$ ...) injektiv. Inversfunksjonen er $\sqrt{x}$.

$y = x^2$ $\quad x \leq 0$ avtagende... så injektiv her er inversfunksjonen $-\sqrt{x}$



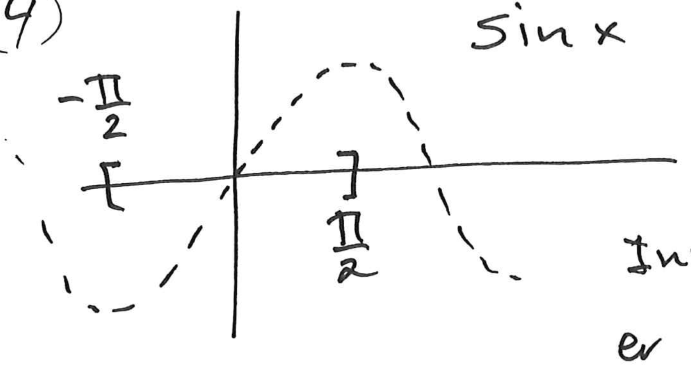
Inversfunksjonen er

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \in [0, 9) \\ -\sqrt{x} & x \geq 9 \end{cases}$$

$f(x) = x^2$ $\qquad D_f = \langle -\infty, -3] \cup [0, 3\rangle$

injektiv

(4)



$\sin x$ avgrenset til $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ er injektiv

Invers funksjonen der er $\sin^{-1}(x)$

$f^{-1}(x)$ må ikkje forvekslest med

$(f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)}$

$f(x) = x^3$ $\qquad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \qquad (f(x))^{-1} = \frac{1}{x^3}$.

$\sin^{-1}(x) \neq \frac{1}{\sin(x)} = (\sin(x))^{-1}$

oppg. Vis at $f(x) = x^2 - 5x \quad D_f = [-1, 2]$ har en inversfunksjon. Finn f^{-1}.

$f'(x) = 2x - 5 < 0$ i $D_f \Rightarrow$ avtagende

$\Rightarrow$ injektiv. så $f(x)$ har en inversfunksjon.

$y = x^2 - 5x \qquad V_f = [-6, 6]$

Uttrykker x ved hjelp av y.

$x^2 - 5x - y = 0$ $\qquad$ 2. gradslikning i x

$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4y}}{2}$ $\qquad x \leq 2$ så

Løsningen er $\quad x = \frac{5 - \sqrt{25+4y}}{2}$.

$f^{-1}(x) = \frac{5 - \sqrt{25+4y}}{2} \qquad D_{f^{-1}} = [-6, 6]$

Eks 5

Vis at $f(x) = x^7 + 5x^3 + 2x$ har en inversfunksjon

$f'(x) = 7x^6 + 5 \cdot 3x^2 + 2 \geq 2$ for alle x

$\Rightarrow f(x)$ stigende i $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ injektiv i $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ har inversfunksjon.

oppg. Vis at $f(x) = \sqrt{9-x}$ $D_f = [-3,3]$ har en inversfunksjon. Finn denne.

$$f(x) = \left(\sqrt{9-x}\right)' = \left((9-x)^{1/2}\right)'$$

$$= \frac{1}{2}(9-x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (9-x)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{9-x}}(-1) = \frac{-1}{2\sqrt{9-x}} < 0$$

avtagende, så $f(x)$ er injektiv og har da en inversfunksjon.

$$Y = \sqrt{9-x} \qquad Y^2 = 9 - x$$

$$x = 9 - y^2$$

$$f^{-1}(x) = 9 - x^2 \qquad D_{f^{-1}} = V_f = [\sqrt{6}, \sqrt{12}]$$

Deriverte til inversfunksjoner

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

kjerneregelen med kjerne $f(x)$ gir

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

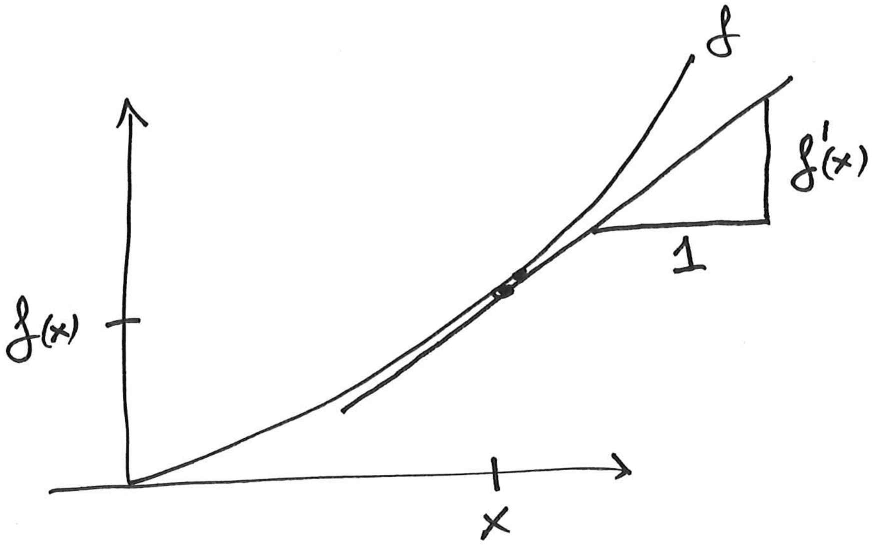
$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

⑥ $$(f')'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Eks. $f(x) = x^3$ $\qquad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3(f^{-1}(x))^2} = \frac{1}{3(x^{1/3})^2}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{2/3}} = \frac{1}{3} x^{-2/3} \quad ✓$$



ser at
$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Eks

Euler tallet

$e = 2.718...$

$f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x = f(x)$

$f^{-1}(x) = \ln(x)$ naturlig logaritme

$$(f^{-1})'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{e^{f^{-1}(x)}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad x > 0$$

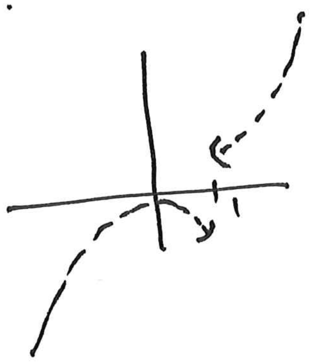
Deriver

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ -x^2 & x < 1 \end{cases}$$

(7)

Eksempel oblig 5 #2...

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ -2x & x < 1 \end{cases}$$



$f(x)$ diskont. i $x=1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1$$

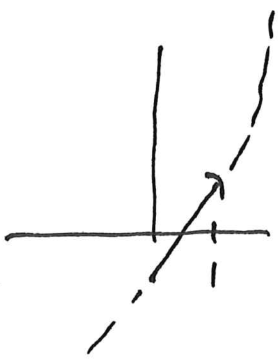
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -x^2 = -1$$

(deriverbar $\Rightarrow$ kontinuerlig)

så $f(x)$ er ikkje deriverbar i $x=1$

Deriver

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ 2x-1 & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} g_1(x) & x \geq 1 \\ g_2(x) & x < 1 \end{cases}$$



$\lim_{x\to 1} g(x) = 1$ så

$g(x)$ er kont. i $x=1$

$$g'(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$$

$$g'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$

$$g(1) = g_1(1)$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{g_1(x)-g_1(1)}{x-1} = g_1'(1)$$

$$= 2x\big|_{x=1} = 2$$

$\rightarrow$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{g_2(x)-g_1(1)}{x-1}$$

(8)

(siden $g(x)$ er kont. i $x=1$
så er $g_1(1) = g_2(1)$)

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{g_2(x)-g_2(1)}{x-1} = g_2'(1) = +2\big|_{x=1} = 2$$

så $g'(1) = \lim_{x\to 1} \dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = 2$

Derfor er $g'(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$

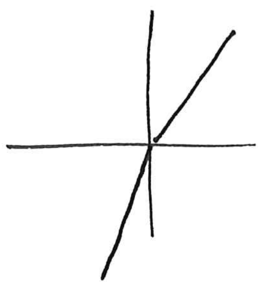
$$g(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 3x & x \leq 0 \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ 3 & x < 0 \end{cases}$$

(Den deriverte til g i x avhenger bare av $g(z)$ for z nær x.)

g er kontinuerlig i $x=0$

$g'(x)$ er ikke deriverbar i $x=0$. Der er det et "brekkpunkt".



$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{3x-0}{x} = 3$$

så $g'(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ eksisterer ikkje.