

Optimalisering 7.3 og 7.4

① Ekstremalverdisetning.

Hvis f er kontinuerlig og har def. mengde et lukket ^{begrensa} intervall $[a, b]$, da har f både topp og bunnpunkt.

Ekse Finn ekstremalpunktene til $3 - x^3$ på $[-1, 2]$

$f(x) = 3 - x^3$ kontinuerlig ✓ $[-1, 2]$ lukket intervall ✓

Setning gir da eksistens av topp og bunnpunkt.

Sjekker kritiske punkt:

- $f'(x) = -3x^2 = 0$ stasjonært punkt $x = 0$



$f'(x)$ avtar i hele $[-1, 2]$

$x = 0$ er ikke et ekstremalpt.

- f deriverbar for alle x .

- Endepunkt $x = -1$ og $x = 2$

$$f(-1) = 3 - (-1)^3 = 4$$

$$f(2) = 3 - (2)^3 = -5$$

$(-1, 4)$ globalt toppunkt
 $(2, -5)$ — bunnpunkt.

Oppg.

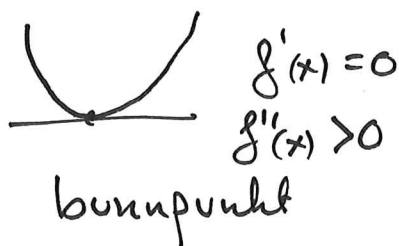
Finn ekstremalpunktene til

② $f(x) = x^3 - x^2$ på $[-2, 1]$.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$$

$f'(x) = 0$ når $x = 0$, $x = \frac{2}{3}$
maks.pt. minimumspt

2. derivert testen.



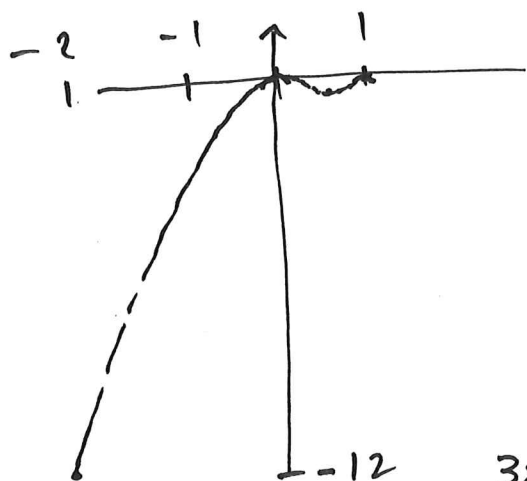
$f'(x) = 0$ $f''(x) < 0$
topunkt

$$f''(x) = 6x - 2$$

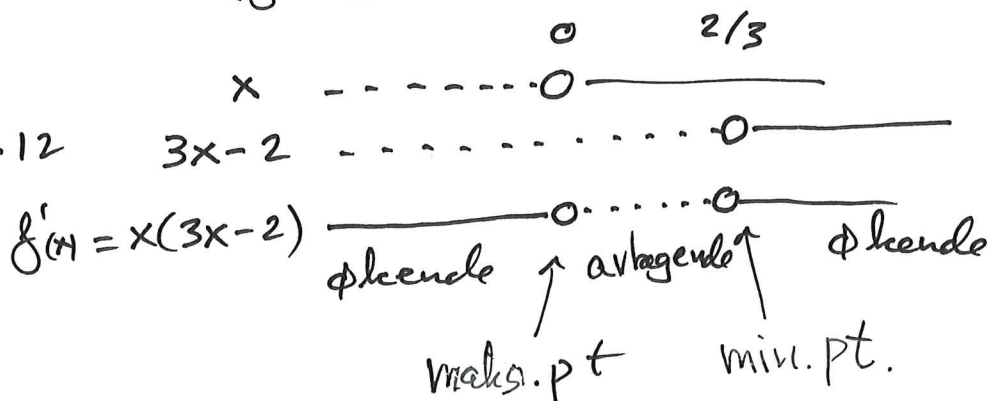
$f''(\frac{2}{3}) = 4 > 0$ minimumspt
 $-2 = 2 > 0$

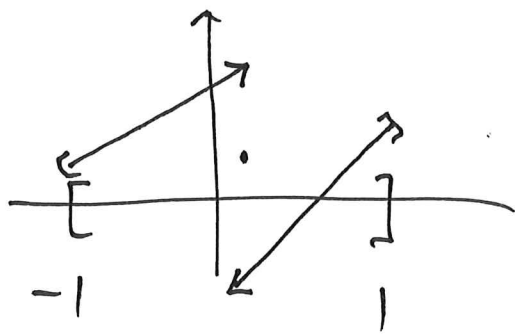
$f''(0) = -2 < 0$ maksimumspt.

Endepunkt: $f(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 = -12$ global min. verdi;
 $f(1) = 1^3 - 1^2 = 0$ global maks verdi;
 $f(0) = 0^3 - 0^2 = 0$ maks.
 $f(\frac{2}{3}) = x^2(x-1)|_{x=\frac{2}{3}} = (\frac{2}{3})^2(\frac{2}{3}-1) = \frac{-4}{27}$ lokal min. verdi;

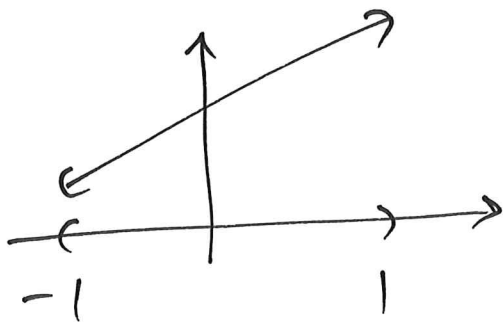


Monotoniegenskaper
(fortegn til $f'(x)$ og diskontinuiteter)

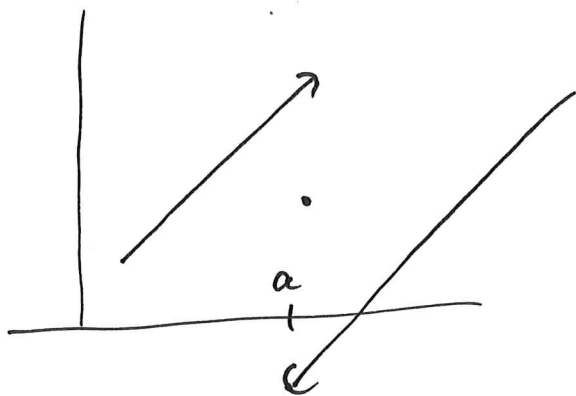
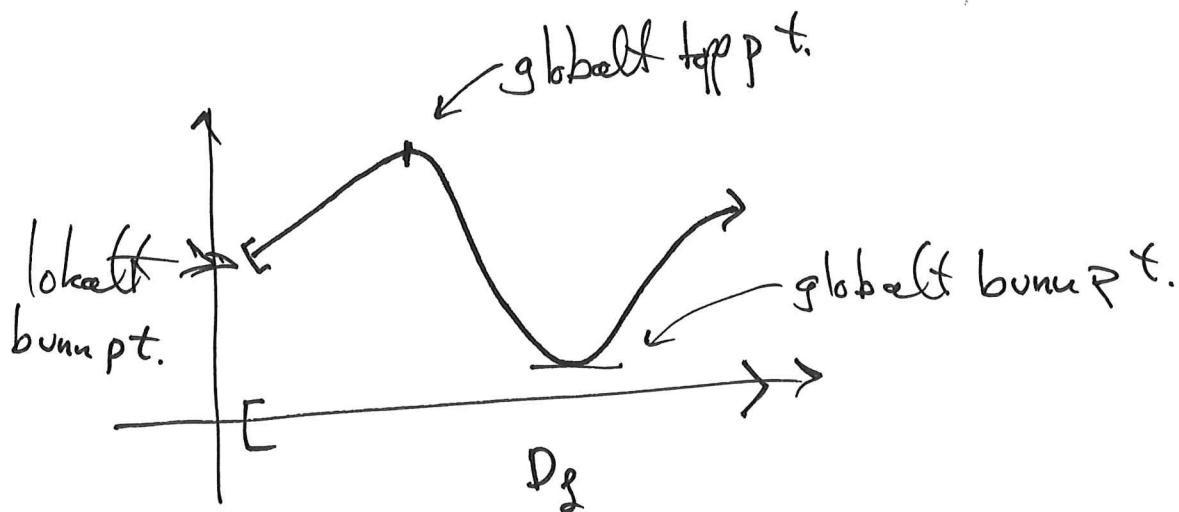
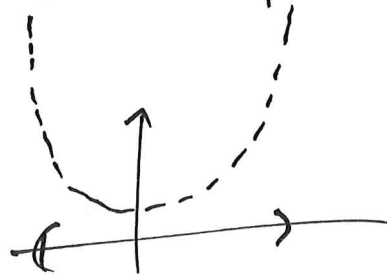




f ikke kont:
behøver ikke ha
globale ekstremalpunkt.

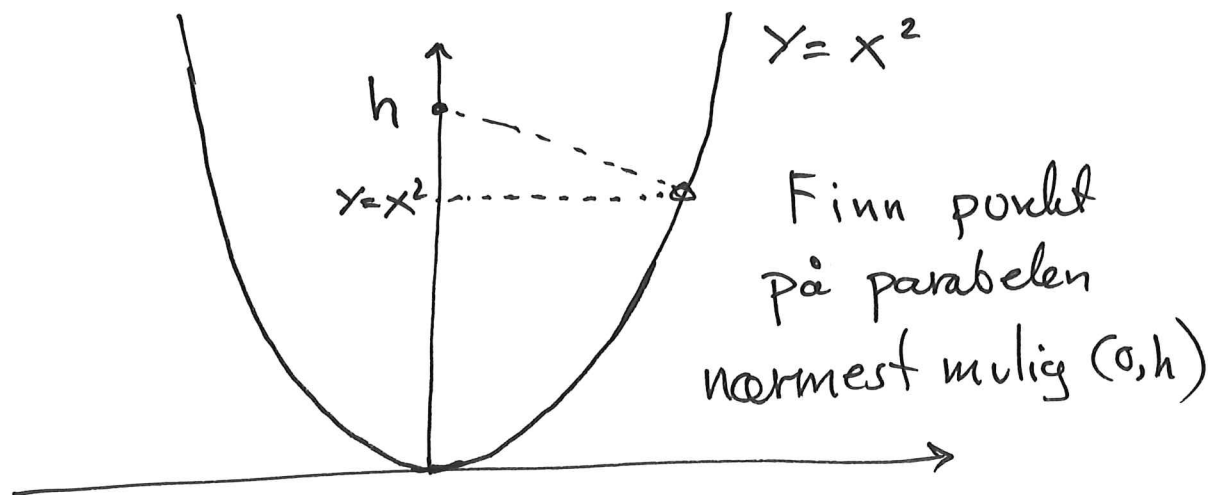


ingen ekstremalpunkt.



$f'(a)$ eksisterer ikke
 $f'(x) > 0$ hvordan eksisterer
 $f(x)$ er ikke økende!

(4)

(hjelp til
oppg 8 i
oblig 5)

Avstanden mellom $(0, h)$ og (x, x^2) er

$$L(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 - h)^2}$$

stasjonere pt : $L'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + (x^2 - h)^2}} \cdot (x^2 + (x^2 - h)^2)'$

$$L'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dots}} \cdot (2x + 2(x^2 - h) \underbrace{(x^2 - h)'}_{2x})$$

$$L'(x) = 0 \quad \text{gir} \quad 2x + 2(x^2 - h) \cdot 2x = 0$$

$$x(1 + 2(x^2 - h)) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{eller} \quad 1 + 2x^2 - 2h = 0 \quad \text{som gir} \quad x = \pm \sqrt{h - \frac{1}{2}} \quad h \geq \frac{1}{2}$$

$x = 0$ minimumsp for $h \leq \frac{1}{2}$

$x = \pm \sqrt{h - \frac{1}{2}}$ minimumsp for $h \geq \frac{1}{2}$

$$L(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 - h)^2}$$

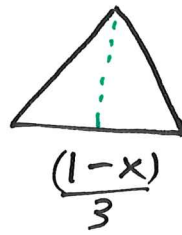
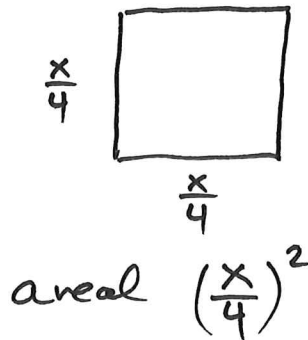
$$L(0) = |h|$$

$$L\left(\pm \sqrt{h - \frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\left(h - \frac{1}{2}\right) + \left(h - \frac{1}{2} - h\right)^2}$$

$h > \frac{1}{2}$

$$= \sqrt{\left(h - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}} = \sqrt{h - \frac{1}{4}}$$

- 5) Hvordan bør en streng på 1m deles for at arealet til et kvadrat og en likesidet trekant som bøyes til av bitene skal bli minst mulig



høyden er $\frac{(1-x)}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

arealet er $\frac{(1-x)^2}{3^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2}$

$$A(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{(1-x)^2 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot 3^2}$$

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{2x}{16} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot 9} \left(2(1-x) \overset{-1}{(1-x)'} \right) \\ &= \frac{x}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 9} (1-x) = \frac{x}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 9} + x \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 9} \\ &= x \left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 9} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 9} = 0 \end{aligned}$$

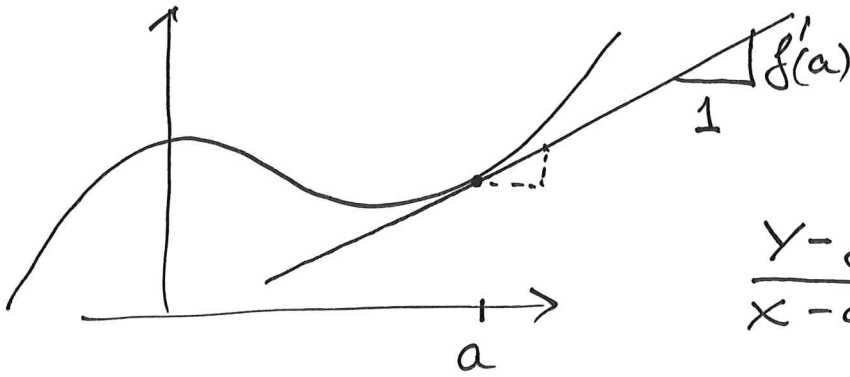
$$A'(x) = 0 \text{ når } x = \frac{\sqrt{3}/(2 \cdot 9)}{1/8 + \sqrt{3}/(2 \cdot 9)}$$

$$x = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 9/8} + \sqrt{3}}{\frac{4}{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{9 + 4\sqrt{3}}$$

$$\sim 0.435 = \underline{43.5 \text{ cm}}$$

Tangentlinjer til å tilnærme funksjoner

⑥



$$\frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Likningen til tangentlinjen

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{1/2-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Tangentlinjen til $\sqrt{x}$ i $x = a^2$ $a > 0$

$$\begin{aligned} y(x) &= f'(a^2)(x - a^2) + f(a^2) \\ &= \frac{1}{2a}(x - a^2) + a \\ &= a + \frac{(x - a^2)}{2a} \end{aligned}$$

$$x - a^2 = h$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{a^2 + h} \sim a + \frac{h}{2a}$$

Estimat ved å bruke tangentlinjen

$$\begin{aligned} \sqrt{10} &= \sqrt{9+1} = \sqrt{3^2+1} \approx 3 + \frac{1}{2 \cdot 3} = 3 + \frac{1}{6} \\ &= 3.1666... \end{aligned}$$

($\sqrt{10} = 3.1623...$)

$$\begin{aligned} \sqrt{50} &= \sqrt{49+1} \approx 7 + \frac{1}{2 \cdot 7} = 7 + \frac{1}{14} = 7.0714 \\ &= 7.0711 \end{aligned}$$

Eks
(oblig 5 #6)

⑦

Bestem alle polynomer av grad ≤ 2
som går gjennom origo og $(1,1)$
Finn også alle pol. som i tillegg har
derivert lik 0 i $x=1$.

$$p(x) = ax^2 + bx + c \quad (\deg p \leq 2)$$

$$p(0) = 0 \quad \text{gir} \quad c = 0$$

$$p(1) = 1 \quad a + b = 1.$$

$$b = 1 - a.$$

Alle pol.

$$p(x) = ax^2 + (1-a)x$$

Krever også $p'(1) = 0$

$$p(x) = (ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$$

$$p(1) = 0 \quad 2a + b = 0$$

$$2a + b = 0$$

$$a + b = 1$$

$$a = -1$$

$$b = 2$$

$\exists$ H slikt polynom. Det er

$$p(x) = \underline{-x^2 + 2x}$$