3. des. 2018 Matteforkurs

1 a) Konjugatsetningen gir

$$\frac{1}{12x}\left[(2+3x)^2-(2-3x)^2\right]=\frac{1}{12x}\left[(2+3x+2-3x)(2+3x-(2-3x))\right]$$

$$=\frac{1}{12x}\left[4\cdot 6x\right]=\underline{\underline{2}}$$

b) $2x<-x-3$ og $-x-3\leq 8$

Skal begge være oppfylt.

$3x<-3$ og $-3-8\leq x$

$x<-1$ og $-11\leq x$

Løsningen er alle x slik at

$$\underline{-11\leq x<-1}$$

c) $L+M=324$ og

$2(L-44)=M+44 \iff 2L-M=3\cdot 44$

Her er L lik <u>opprinnelig pengemengde</u> til LoLo

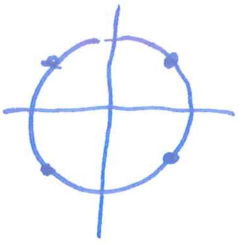
M Misha.

Vi legger sammen likningene og får

$3L=324+3\cdot 44$ så $L=\frac{324}{3}+44=108+44$

$\underline{\underline{L=152}}$. $\underline{M=324-152}=\underline{172}$

1 d) $\cos^2 v = \sin^2 v$ $\qquad 0 \le v < 2\pi$



Dette er ekvivalent til $\cos v = \sin v$

eller $\cos v = -\sin v$.

$\cos v$ må være ulik 0 (siden da er $\sin v = \pm 1$)
så likningene er ekvivalent til $\tan v = 1$

$\tan v = -1$.

Løsningene er $\underline{v = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}}$.

e) $9^x = \frac{1}{27} = 3^{-3}$ $\qquad 9 = 3^2$ så

$(3^2)^x = 3^{2x} = 3^{-3}$

Derfor må $2x = -3$ og $x = \underline{\underline{-3/2}}$.

f) $\sqrt{5+x} = 1 - x \xRightarrow[\text{begge sider}]{\text{kvadrere}} 5 + x = (1-x)^2$

$5 + x = 1 - 2x + x^2 \iff x^2 - 3x - 4 = 0$

$\iff (x-4)(x+1) = 0$ så $x = -1$ og $x = 4$

Løsningene til likningen vår må være blant -1 og 4. Vi sjekker om de er løsninger:

$x = -1$: $\sqrt{5+x} = \sqrt{4} = 2$ og $1 - (-1) = 2$ ✓

$x = 4$: $\sqrt{5+x} = \sqrt{9} = 3$ men $1 - x = 1 - (4) = -3$ Falsk løsning →

1 f) Løsningen til $\sqrt{5+x} = 1-x$ er $\underline{\underline{x=-1}}$

2 a) $\dfrac{3x}{x^2-4} \le 1$

Flytter 1 over til venstre side og finner felles nevner:

$$\frac{3x}{x^2-4} - \frac{(x^2-4)}{x^2-4} \le 1-1 \iff$$

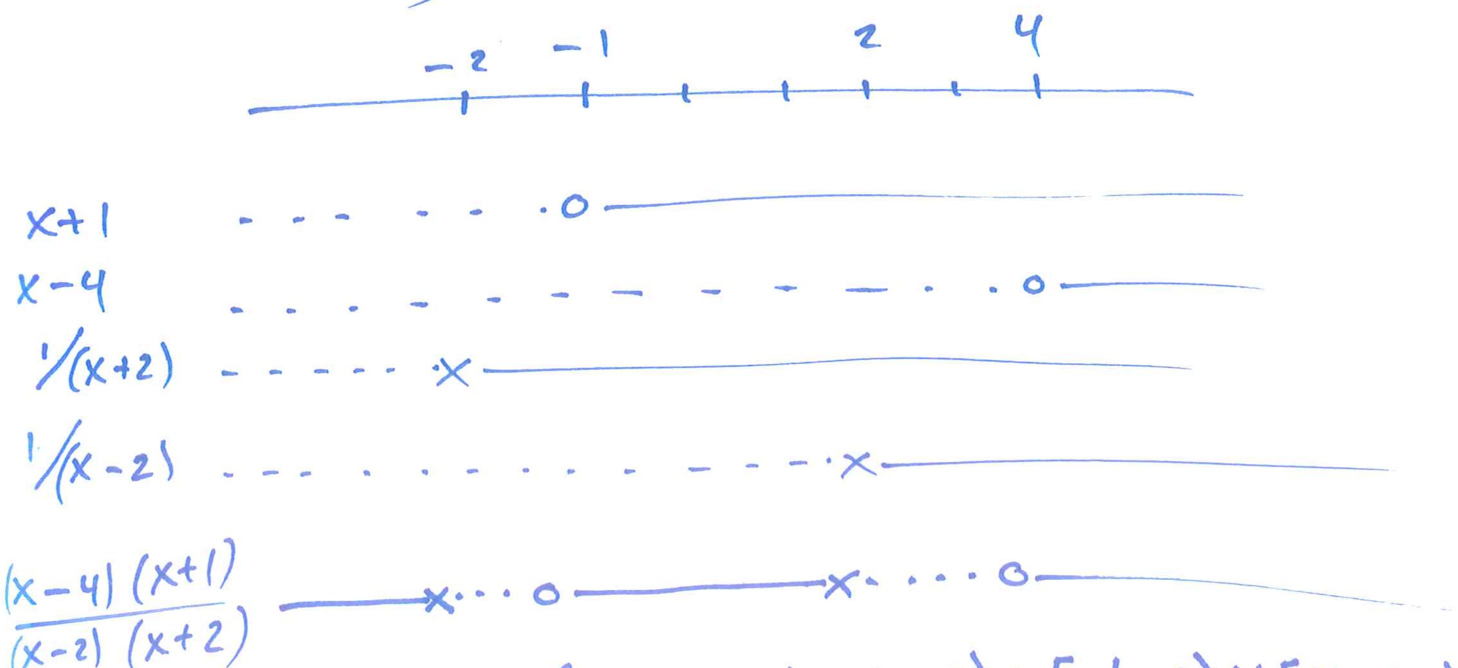
$$\frac{3x - x^2+4}{x^2-4} \le 0$$

Vi faktoriserer teller og nevner

$$\frac{-(x^2-3x-4)}{x^2-4} = \frac{-(x-4)(x+1)}{(x-2)(x+2)} \le 0$$

$$\iff \frac{(x-4)(x+1)}{(x-2)(x+2)} \ge 0$$

Fortegnskjema



Løsningsmengden er $\underline{\langle -\infty, -2\rangle \cup [-1, 2\rangle \cup [4, \infty\rangle}$

2 b) $\frac{x^2-1}{8}$

$x = 1$ $\quad 0$

$x = 3$ $\quad \frac{9-1}{8} = 1$

$x = 5$ $\quad \frac{25-1}{8} = 3$

$x = 7$ $\quad \frac{49-1}{8} = 6$

$x = 9$ $\quad \frac{81-1}{8} = 10$

$x = 11$ $\quad \frac{121-1}{8} = 15$

La $x_n = (2n-1)$. Da er x_n det positive oddetall nr n.

$$\frac{(2n-1)^2-1}{8} = \frac{(2n)^2 - 2(2n) + (-1)^2 - 1}{8}$$

$$= \frac{4(n^2-n)}{8} = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Dette er et heltall fordi en av n og $n-1$ er et partall.

(Vi kjenner også igjen $\frac{n(n-1)}{2}$ som summen $0+1+2+\cdots+(n-1)$ av de n første ikke-negative heltallene.)

3 a) $p(x) = 6x^2 - x - 1$

Vi finner røttene (løsningene til $p(x) = 0$)

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-1)(6)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 6}$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{2 \cdot 6} \qquad \text{så} \quad x = \frac{1}{2} \text{ og } x = \frac{-1}{3}$$

Faktoriseringen er

$$p(x) = \underline{6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)}$$

b) $x + b = x - (-b)$ deler et polynom $p(x)$ hvis og bare hvis $p(-b) = 0$.

$p(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$ delelig med $x + b$

$\Leftrightarrow \; p(-b) = (-b)^3 + 3(-b)^2 + 2(-b) = -b^3 + 3b^2 - 2b = 0$

$\Leftrightarrow \; b(b^2 - 3b + 2) = 0$ Faktorisere

$\Leftrightarrow \; b(b-2)(b-1) = 0$ Løsningene er:

$\underline{b = 0, \; b = 1 \text{ og } b = 2}$

4 a) $\sum_{i=-55}^{-7} i = -\sum_{i=7}^{55} i$

$$= -\left[\sum_{i=1}^{55} i - \sum_{i=1}^{6} i\right] = -\left[\frac{55\cdot 56}{2} - \frac{6\cdot 7}{2}\right]$$

$$= -(55\cdot 28 - 3\cdot 7) = -(5\cdot 11\cdot 4\cdot 7 - 3\cdot 7)$$

$$= -[7(20\cdot 11 - 3)] = -7\cdot 217$$

$$= -[7\cdot 200 + 7\cdot 10 + 7\cdot 7] = \underline{\underline{-1519}}$$

b) Kvotienten er $\frac{-3}{9} = \underline{\frac{-1}{3}}$

Summen til den geometrisk rekken konvergerer siden $\left|\frac{-1}{3}\right| < 1$.

Summen er lik

$$9\left(1 + \left(\frac{-1}{3}\right) + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \cdots\right) = 9\cdot\frac{1}{1-(-1/3)}$$

$$= 9\cdot\frac{1}{4/3} = 9\cdot\frac{3}{4} = \underline{\underline{\frac{27}{4}}}$$

4 c) $S_n = 3+6+9+12+\cdots+3\cdot n$

$$= 3(1+2+\cdots+n) = 3\,\frac{n(n+1)}{2}$$

Vi skal finne størst mulige n slik at

$S_n \leq 8000$.

$$\frac{3\,n(n+1)}{2} \leq 8000$$

$$\Leftrightarrow \qquad n(n+1) \leq \frac{16000}{3}.$$

Vi kan løse andregradslikningen $n^2+n-\frac{16000}{3}=0$.
I stede finner vi ut når $n^2 = \frac{16000}{3}$ og
bruker det til å finne størst mulig n (det er enklere)

$$\sqrt{\frac{16000}{3}} = 73.02 \qquad (n \text{ er liten i forhold til } n^2)$$

$n=73$: $\frac{3}{2}\cdot 73\cdot 74 = 8103 > 8000$ for stor

$n=72$: $\frac{3}{2}\cdot 72\cdot 73 = 7884 < 8000$

Det største antall ledd slik at summen ikke overstiger 8000 er derfor $\underline{\underline{72}}$

d) Et slikt eksempel er den harmoniske rekken
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Et annet eksempel er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

5 Summen av kreftene

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

$$\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

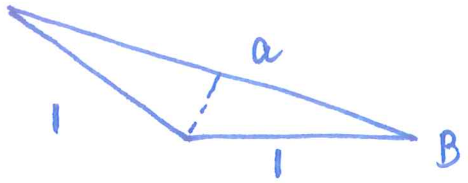
$$-(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = -\left([2.3,\ 4.5,\ 6.8] + [1.1,\ -4.5,\ -8.6]\right)$$

$$= -[3.4,\ 0,\ -1.8]$$

$$\underline{\vec{F}_3 = [-3.4,\ 0,\ 1.8]} \text{ Newton}$$

6 Vi får tre forskjellige muligheter

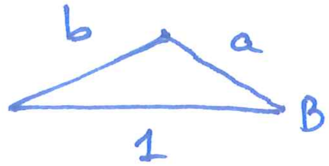
$b = c$



$a = 2 \cdot \cos(30°)$

$\underline{a = \sqrt{3}}$

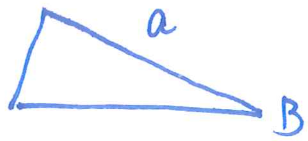
$a = b$



$\underline{a = \frac{1}{\sqrt{3}}}$

(fra foregående tilfelle)

$a = c$



$\underline{a = c = 1}$

7 $3x + 5y - 4z = -3$

Snittet med xy-planet, hva $z = 0$,
er alle (x,y) slik at $3x + 5y + 0 = -3$

$5y = -3 - 3x$

$\underline{y = \frac{-3}{5}x - \frac{3}{5}}$

8 Ortogonale: $[1,2] \cdot [a, a+2] = 0$

$a + 2(a+2) = 3a + 4 = 0$

$\underline{a = -4/3}$

parallelle: $t[1,2] = [a, a+2]$ for en t

Dette gir $a + 2 = 2 \cdot a$

$2 = 2a - a$

$\underline{a = 2}$

Vektorene er ortogonale når $a = \underline{-4/3}$
og parallelle når $\underline{a = 2}$.

9 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= [1,2,-1] - [2,-1,3] = [-1,3,-4]$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

$= [2,4,5] - [2,-1,3]$

$= [0,5,2]$

En normalvektor til planet er:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \right]$$

$$= [26, 2, -5]$$

$P(x,y,z)$ ligger i planet $\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AP} \perp$ normalvektoren til planet

$$26x + 2y - 5z = 26 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-5)(3)$$
$$= 35$$

Likningen for planet er

$$\underline{\underline{26x + 2y - 5z = 35}}$$

10

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1}{x-3}\right) = -2$$

$$\operatorname{Log}(x-3)^{-1} = -2$$

$$-\operatorname{Log}(x-3) = -2$$

$$\operatorname{Log}(x-3) = 2$$

$$x-3 = 10^{\operatorname{Log}(x-3)} = 10^2 = 100$$

$$\underline{x = 103}$$