16.11.2018 Fausk

(1) 8.1-8.4 Eksponentfunksjoner og Logaritmefunksjoner

Potensreglene

$$\begin{cases} a^n = \overbrace{a \cdots a}^{n \text{ kopier}} & n \text{ naturlig tall} \\ a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\ (a^m)^n = a^{m \cdot n} \end{cases}$$

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a$$

Reglene gir $a^{-1} = \frac{1}{a}$ $\qquad (a^{1/n}) = \sqrt[n]{a}$

ved utvidelse til $\mathbb{Q}$ $\qquad a > 0$

$$a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

Egenskapene ovenfor er forsatt gyldige.

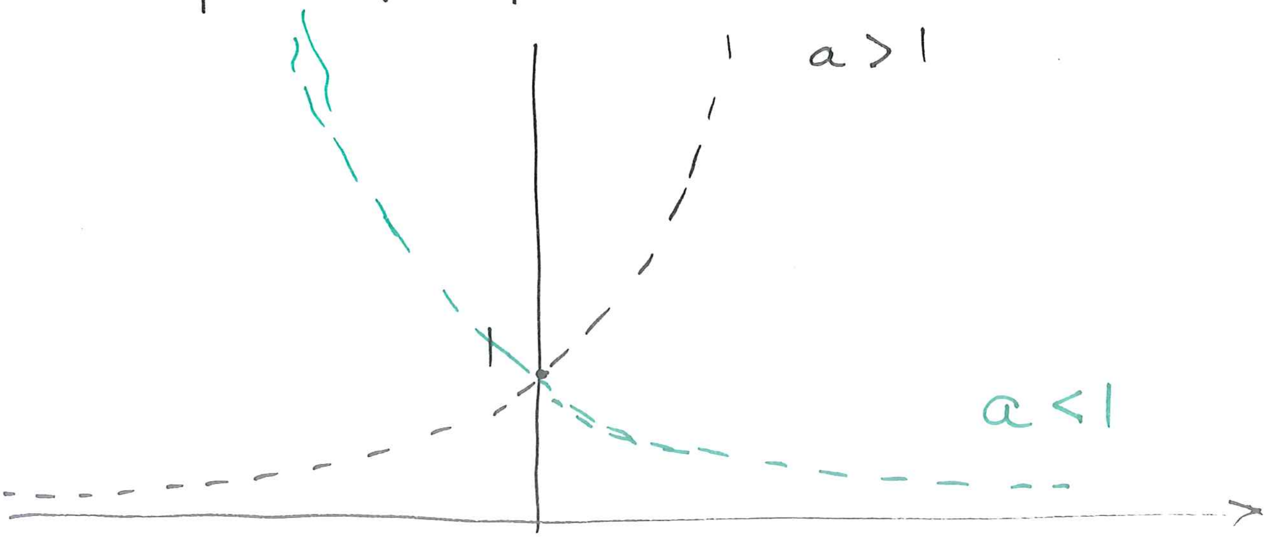
a^r grensen av $a^{m/n}$ for $\frac{m}{n} \to r$.

Potensreglene gyldige for reelle eksponenter

eksponent

grunntall $\boxed{a^x}$ potens $\qquad x \in \mathbb{R} \qquad a > 0$, $a \neq 0$

eksponentfunksjonene



Logaritme med grunntall a $\left(\begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix}\right)$

2

$\operatorname{Log}_a(b)$ def. ved

$$\boxed{a^{\operatorname{Log}_a b} = b} \quad \text{for alle } b > 0$$

$a = 10$ $\quad \operatorname{Log}_{10}(b) = \operatorname{Log}(b) = \lg(b)$

Briggske logaritmer, 10-logaritmer.

$1000 = 10^3$ så $\operatorname{Log}(1000) = 3$

$0.0001 = 10^{-4}$ så $\operatorname{Log}(0{,}0001) = -4$

Bruk av logaritmetabeller før datamaskiner ble tilgjengelige:

$$a \cdot b = 10^{\operatorname{Log} a} \cdot 10^{\operatorname{Log} b} = 10^{\operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b}$$

"reduserer multiplikasjon til addisjon"

$$3^x = 7$$

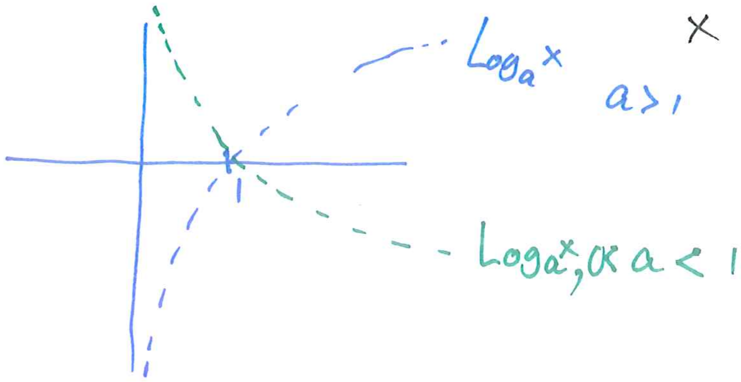
$$\left(10^{\operatorname{Log} 3}\right)^x = 10^{\operatorname{Log} 7}$$

$$10^{x \operatorname{Log} 3} = 10^{\operatorname{Log} 7}$$

10^y økende funksjon, så $\quad x \operatorname{Log} 3 = \operatorname{Log} 7$

$$x = \frac{\operatorname{Log} 7}{\operatorname{Log} 3} = 1{,}77\ldots$$

Grafen til $\operatorname{Log}_a(x)$



③ Egenskaper til Log

Logaritme-reglene

$$\text{Log}(a \cdot b) = \text{Log}(a) + \text{Log}(b)$$

$$\text{Log}(a^r) = r\,\text{Log}(a) \qquad a>0, \; r \text{ reelt tall}$$

$$\text{Log}(10) = 1 \quad (\text{siden } 10^1 = 10)$$

$$\text{Log}(1) = 0 \quad (\text{siden } 10^0 = 1)$$

Vi viser dette:

$$a \cdot b = 10^{\text{Log}(a \cdot b)} = \underbrace{10^{\text{Log } a}}_{a} \cdot \underbrace{10^{\text{Log } b}}_{b}$$

$$= 10^{\text{Log } a + \text{Log } b}$$

Eksponentene må være like: $\underline{\text{Log}(a \cdot b) = \text{Log } a + \text{Log } b}$

$$a^r = 10^{\text{Log}(a^r)}$$

$$= \left(10^{\text{Log } a}\right)^r = 10^{r \text{Log } a}$$

så $\underline{\text{Log}(a^r) = r \text{ Log } a}$

$4^x = 9$ Vi tar Log på begge sider

$$\text{Log } 4^x = x\,\text{Log}(4) = \text{Log } 9$$

$$\underline{\underline{x = \frac{\text{Log } 9}{\text{Log } 4}}}$$

4

$$4 \cdot 9^x = 12$$

deler med 4 : $9^x = 12/4 = 3$

$$\operatorname{Log}(9^x) = x \operatorname{Log} 9 = \operatorname{Log} 3$$

$$x = \frac{\operatorname{Log} 3}{\operatorname{Log} 9} = \frac{\operatorname{Log} 3}{\operatorname{Log} 3^2} = \frac{\operatorname{Log} 3}{2 \operatorname{Log} 3}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Løs likningen $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$

hint $4 = 2^2$. så $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$

$$(2^x)^2 - 3 \cdot (2^x) - 4 = 0$$

2.gradslikning i 2^x

$$(2^x - 4)(2^x + 1) = 0$$

Så $2^x = -1$ eller $2^x = 4$

ingen løsning $\qquad \underline{x = 2}$

$$\left(\frac{\log 4}{\operatorname{Log} 2} = \frac{\operatorname{Log} 2^2}{\operatorname{Log} 2} = \frac{2 \operatorname{Log} 2}{\operatorname{Log} 2} = 2 \right)$$

Løsningene er $\underline{x = 2}$

(5) $e = 2,718\ldots$ <u>Eulertallet</u>

$P_t = P_0 e^{rt}$ t år

pengemengde etter tid t,

r kontinuerlige renter

$P_1 = P_0 + r_{p.a} P_0 = (1 + r_{p.a}) P_0$

$r_{p.a}$ årlig rente.

$$e^r = 1 + r_{p.a}$$

Hvis $r = 100\% = 1$,

da er den årlige rente $r_{p.a} = e^1 - 1 = 1.718$

$= 171,8\%$

oppgave: Hvis årlig rente er 10%

hva er da kontinuerlig rente?

$$e^r = 1 + 10\%$$

$$e^r = 1,1$$

Tar Log på begge sider:

$$\text{Log } e^r = \text{Log}(1,1)$$

$$r \text{ Log } e = \text{Log}(1,1)$$

$$r = \frac{\text{Log}(1,1)}{\text{Log}(e)} = \underline{9,53\%}$$

⑥ Logaritme med basis Euler tallet e kalles naturlig logaritme

$$\log_e x = \underline{\ln x}$$

$$\operatorname{Log} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

generelt $\operatorname{Log}_a x = \dfrac{\ln x}{\ln(a)}$

Vi viser dette:

$$x = a^{\operatorname{Log}_a x}$$

$$e^{\ln x} = \Big(\underbrace{e^{\ln(a)}}_{a}\Big)^{\operatorname{Log}_a x}$$

$$= e^{\ln a \cdot \operatorname{Log}_a x}$$

Dette gir $\ln x = \ln a \cdot \operatorname{Log}_a x$

Deler vi med $\ln a$ får vi $\operatorname{Log}_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln(a)}$

Flere logaritme likninger

7

$$\ln(x^3) + \ln(x^2) = 5$$

$$3\ln x + 2\ln x = 5$$

$$5\ln x = 5 \qquad \text{deler med 5}$$

$$\ln x = 1$$

$$x = e^{\ln x} = e^1 = e$$

Løsningen er $\underline{x = e}$

$$\operatorname{Log}\left(\frac{a}{b}\right) = \operatorname{Log}(a \cdot (b^{-1})) =$$

$$= \operatorname{Log}(a) + \operatorname{Log}(b^{-1})$$

$$\operatorname{Log}\left(\frac{a}{b}\right) = \operatorname{Log}(a) - \operatorname{Log}(b)$$

oppgave : Løs logaritme likninger

$$\operatorname{Log}(x+1) - \operatorname{Log}(x) = 1$$

$$10^{\operatorname{Log}\left(\frac{x+1}{x}\right)} = 10^1$$

$$\frac{x+1}{x} = 10^1 = 10$$

ganger med x : $x + 1 = 10x$

så $1 = 10x - x = 9x$

og $\underline{\underline{x = 1/9}}$