14. nov 2018 **Mer om rekker** Faush

① Desimaltall $\quad 0 \leq a_i \leq 9$

$$0,a_1a_2a_3$$
$$= a_1 \cdot \frac{1}{10} + a_2\left(\frac{1}{10}\right)^2 + a_3\left(\frac{1}{10}\right)^3$$

$$0,a_1a_2a_3\ldots$$
$$= a_1\left(\frac{1}{10}\right) + a_2\left(\frac{1}{10}\right)^2 + a_3\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots + a_n\left(\frac{1}{10}\right)^n + \cdots$$

uendelig rekke.

$$= \sum_{i=1}^{\infty} a_i\left(\frac{1}{10}\right)^i$$

Alle periodiske desimaltall er rasjonale tall

$$0.12\,12\,12\,12\ldots = 0,\underline{12}$$

$$12 \cdot (\underbrace{0.01010101\ldots}_{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^i})$$

$$= 12 \cdot \frac{1}{100}\left(\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^i}_{\frac{1}{1-\frac{1}{100}}}\right)$$

$$= 12 \cdot \frac{1}{100-1} = \frac{12}{99} = \underline{\underline{\frac{4}{33}}}$$

Oppgave:

Skriv 1) $0.123123\ldots = 0.\overline{123}$

2 og 2) $0.257777\ldots = 0.25\overline{7}$

som brøker.

1) $123 \cdot (0.001001001\ldots)$

$$= 123 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1000}\right)^i$$

$$= 123 \cdot \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{123}{999} = \underline{\underline{\frac{41}{333}}}$$

2) $0.25 + 0.00777\ldots$

$$= \frac{25}{100} + \frac{1}{100} \cdot \underbrace{0.777\ldots}_{7 \cdot \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{100} \cdot 7 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - 1/10}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{7}{100} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{4} + \frac{7}{900}$$

$$\left(= \frac{225+7}{900} = \underline{\frac{232}{900}} \quad \ldots \right)$$

$$0.999\ldots = 9 \cdot (0.1111\ldots) = 9 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i$$

$$= 9 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 9 \cdot \frac{1}{9} = \underline{1}$$

To ulike desimaltall representerer det samme reelle tallet.

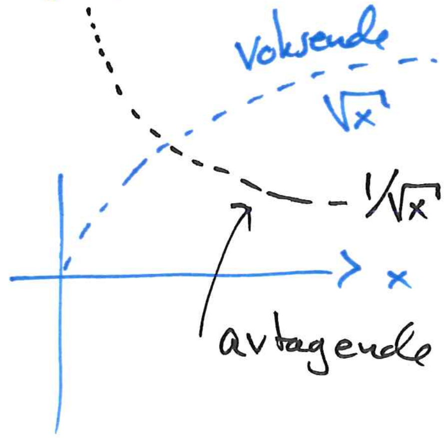
3) Hvis $\sum a_n$ konvergerer, da må a_n gå mot 0 når n blir stor

($a_n \to 0$ når $n \to \infty$, eller $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$)

Selvom $a_n \to 0$ når $n \to \infty$, så trenger ikke rekken konvergere.

Eksempel $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$ divergerer

selv om $a_i = \frac{1}{\sqrt{i}} \to 0$ når $i \to \infty$



n-te delsum $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$

$\sqrt{i}$ er voksende

$$S_n = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ ledd}}$$

$$\geq \underbrace{n}_{\text{antall ledd}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

verdien til det minste leddet

$$S_n \geq \sqrt{n}$$

så S_n går mot uendelig når n går mot uendelig

så $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$ divergerer.

Harmonisk rekke

(4)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

divergerer

$$\sum_{n=1}^{2^N}\frac{1}{n} = 1+\underbrace{\frac{1}{2^0+1}}+\underbrace{\frac{1}{2^1+1}+\frac{1}{2^1+2}}$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2^{N-1}+1}\cdots\cdots+\frac{1}{2^N}\right)}_{2^{N-1}\text{ ledd}}$$

alle leddene er $\geq \frac{1}{2^N}$

så summen e $\geq 2^{N-1}\cdot\frac{1}{2^N}=\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{2^N}\frac{1}{n} \geq 1+(\underset{N}{\text{antall grupper}})\cdot\frac{1}{2}$$

(nedre estimat for summen av hver gruppe)

$$=\underline{1+\frac{N}{2}}$$

$$\sum_{n=1}^{2^N}\frac{1}{n}\geq 1+\frac{N}{2}$$

siden delsummen går mot uendelig når antall ledd går mot uendelig divergerer den harmoniske rekken.

Tilnerming av funksjoner med polynomer.

5

$$\frac{1}{1-x}$$ tilnærmer vi denne funksjonen med polynomer får vi

$$S_n = 1 + \cdots + x^n$$

og grensen $\lim_{n \to \infty} S_n$ gir $\frac{1}{1-x}$

når $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

$|x| < 1$

Tilnermer sin x med polynomer i x:

potensrekke

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$ "n fakultet"

(6)

Matematisk induksjon

$$S_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{alle } n$$

$S_1 = 1 \quad S_2 = 5, \quad S_3 = 14, \quad S_4 = 30, \quad S_5 = 55$

setter inn $n=3$ i formelen: $\frac{3(4)(7)}{6} = \underline{14}$ ✓

$n=4$: $\frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} = \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2 \cdot 3} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = \underline{30}$ ✓

For alle n har vi:

$S_n - S_{n-1} = n^2$

La $T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$S_1 = T_1$ Hvis $T_n - T_{n-1} = n^2$ for alle n,

da vil $S_1 = T_1 \Rightarrow \overset{S_1+2^2}{S_2} = \overset{T_1+n^2}{T_2} \Rightarrow S_3 = T_3$

$\Rightarrow S_4 = T_4 \Rightarrow$ etc $\quad S_n = T_n$ for alle n!

$$T_n - T_{n-1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$= \frac{n}{6}\left[(n+1)(2n+1) - (n-1)(2n-1)\right]$$

$$\left[2n^2+3n+1 - (2n^2-3n+1)\right]$$

$$= \frac{n}{6}(3n+3n) = \underline{n^2}$$

Påstanden $S_{n-1} = T_{n-1}$ impliserer påstanden $\overset{=S_{n-1}+n^2}{S_n} = \overset{=T_{n-1}+n^2}{T_n}$ for alle n

Siden $S_1 = T_1$ så må $S_n = T_n$ for alle n

Dette er eksempel på bruk av matematisk induksjon

$P_0 = 1$ årlig rente på 100%

$P_1 = 1 + 1 = 2$

Rente utbetalin månedlig:

$$\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 2.613035$$

Utbetaling hvert halvår $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25$

Rente utbetaling hver dag:

$$\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2.714567$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\ldots$$

Dette tallet kalles Eulers tall og skrives som e

Det er et irrasjonalt tall.

Kontinuerlig rente på 100% svarer til årlig rente på

$e - 1 = 1.718\ldots$