

7. nov. 2018

Aritmetiske følger og rekker

Fausk

①

En følge a_1, a_2, a_3, \dots

er aritmetisk hvis $a_{n+1} = a_n + d$
alle n

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = d \text{ konstant}$$

$$\Leftrightarrow a_n = a_1 + d(n-1)$$

Eks oddetallene $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$

$$a_1 = 1 \quad d = 2$$

$$a_n = 1 + d(n-1) \\ = 2n - 1$$

Er følgen av naturlige tall delelige med 7
en aritmetisk følge? Hvis ja hva er a_n ?

$7, 14, 21, 28, 35, \dots$ er aritmetisk

$$\text{og } a_n = 7 \cdot n$$

oppgave En aritmetisk følge har $a_8 = 13$

$$a_9 = 11$$

Hva er a_1 og generelt a_n ?

$\dots, 15, 13, 11, 9, 7, \dots$

$a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}$

$$a_1 = 29 - 2 \\ = 27.$$

$$d = a_9 - a_8 = 11 - 13 = \underline{-2}$$

$$a_n = a_8 + d(n-8) \quad \text{så} \quad a_n = 13 + (-2)(n-8) \\ = 13 + 16 - 2 \cdot n \\ = \underline{29 - 2n}$$

En aritmetisk følge har

②

$$a_2 = 2 \text{ og } a_7 = 17$$

Hva er a_n ?

$$a_7 - a_2 = d(7 - 2)$$

$$17 - 2 = 15 = d \cdot 5$$

så $d = 3$

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} \dots & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & + & a_6 & a_7 & \dots \\ & 2 & 5 & 8 & 11 & & 14 & 17 & \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 - d && (\text{siden } a_2 = a_1 + d) \\ &= 2 - 3 = \underline{-1} \end{aligned}$$

$$a_n = a_2 + d(n-2) = 2 + 3(n-2)$$

$$\underline{a_n = -4 + 3n}$$

3) Finnes det en aritmetisk følge slik at

1) $a_3 = 5$ $a_5 = 9$ og $a_7 = 13$?

2) $a_1 = 12$ $a_7 = 0$ og $a_{10} = -10$?

1) $\frac{a_5 - a_3}{2} = \frac{9 - 5}{2} = 2$

$\frac{a_7 - a_5}{2} = \frac{13 - 9}{2} = 2$

like

$a_5 = a_1 + d = (a_3 + d) + d$

$a_5 = a_3 + 2d$

$\frac{a_5 - a_3}{2} = \frac{2d}{2} = d$

a_1, a_2, \dots er kan være del av en aritmetisk følge med $d = 2$

$$a_n = a_3 + d(n-3)$$

$$= 5 + 2(n-3)$$

$$\underline{a_n = 2n - 1}$$

2) $\frac{a_7 - a_1}{7-1} = \frac{0 - 12}{6} = -2$

En aritmetisk følge som har $a_1 = 12$ og $a_7 = 0$ må ha differanse $d = -2$.

$$\frac{a_{10} - a_7}{10-7} = \frac{-10 - 0}{3} = -3,33\dots \neq -2.$$

Så følgen i 2) kan ikke være del av en aritmetisk følg.

Find følgen av naturlige tall delige med både 3 og 5 og mindre enn 1000

(4) $15, 30, 45, 60, \dots, 990$

Delelig med både 3 og 5 \Leftrightarrow delelig med 15

$$a_n = 15 \cdot n$$

$a_N \leq 1000$ og størst mulig.

$$15N = 1000 \text{ gir } n = \frac{1000}{15} = 66.6\dots$$

N må da være 66.

$$\begin{aligned} a_{66} &= 15 \cdot 66 = (10+5) \cdot 66 \\ &= 660 + 330 = 990 \end{aligned}$$

En aritmetisk rekke er rekken tilordnet
en aritmetisk følge

⑤ $a_n = a_1 + d(n-1)$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ n -te delsum

Det er bare én uendelig aritmetisk rekke
som konvergerer. Det er den hvis $a_1 = 0$, $d = 0$
 $0 + 0 + 0 + 0 + \dots$

$a_n = n$ aritmetisk følge

Tilhørende rekke $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

$2 \cdot S_n = \begin{pmatrix} 1+2+3+\dots \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (n-1) + \dots \\ 1 \end{pmatrix} = (n+1) \cdot n$

$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Finn summen til den aritmetiske rekken

$1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \dots + 73$

$a_1 = 1$, $d = 3$ så $a_n = 1 + 3(n-1) = \underline{3n-2}$

Antall ledd i rekken: $a_n = 73$ sist ledd

$3n - 2 = 73$

$3n = 75$

$n = 25$

Eks Finn summen av alle naturlige
tall delelig med både 3 og 5 og
som er mindre eller lik 1000.

6

$$15, 30, 45, \dots, 990$$
$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{66}$$

Summen er $a_1 + a_2 + \dots + a_{66}$

$$= 66 \cdot \frac{15 + 990}{2}$$

ledd gjennomsnitt av
første & siste ledd

$$= 66 \cdot \frac{1005}{2} = 33 \cdot 1005$$

$$= 33000 + 150 + 15$$

$$= \underline{\underline{33165}}$$

Summer til rekken er

$$\sum_{n=1}^{25} a_n = \sum_{n=1}^{25} 3n - 2$$

7

$$= 25(-2) + 3 \sum_{n=1}^{25} n$$

$$= -50 + 3 \cdot \frac{25 \cdot 26}{2}$$

$$= -50 + 3 \cdot 25 \cdot 13$$

$$= -50 + 39 \cdot 25$$

$$= -50 + (40-1) 25$$

$$= 1000 - 50 - 25 = \underline{\underline{925}}$$

Generelt

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$= \sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1) \cdot d)$$

$$= n \cdot a_1 + d \underbrace{\sum_{k=1}^n (k-1)}_{0+1+2+\dots+(n-1) = \frac{(n-1) \cdot n}{2}}$$

$$S_n = n \cdot a_1 + d \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= n \left(a_1 + \frac{d \cdot (n-1)}{2} \right) = \underline{\underline{n \left(\frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \right)}}$$

$$= \frac{n}{2} \left(a_1 + \overbrace{(a_1 + d(n-1))}^{a_n} \right)$$

$$= \underline{\underline{n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}}} = \# \text{ ledd} \cdot \text{gjennomsnitt av 1. og siste ledd.}$$

Er følgen av heltall delelig med 3 eller 7 og mindre enn 1000 en aritmetisk følge?

3 6 7 9 12 14 15 18 21 ...

Ikke en aritmetisk følge.

Finn summen av disse tallene som ≤ 1000 .

Denne summen er

$$\begin{aligned} & (\text{summen av tall delelige med } 3 \text{ og } \leq 1000) \\ & + \left(\frac{\quad}{7} \right) \\ & - \left(\frac{\quad}{3 \cdot 7} \right) \end{aligned}$$

↑ trekkes ifra fordi disse forekommer i begge forgående summe. De telles dobbelt.

Tall delelige med 3 og ≤ 1000

$$a_n = 3 \cdot n$$

$$3n \leq 1000$$

$$a_{333} = 999 \text{ største ledd}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{333} 3 \cdot n &= \frac{333}{2} (3 + 999) = \frac{333}{2} (1002) \\ &= \frac{333 \cdot 666}{2} = \underline{\underline{166833}} \end{aligned}$$

Tall delelige med 7 og ≤ 1000

$$b_n = 7n$$

$$7n \leq 1000$$

$$\text{fra } n=1 \text{ til } n=142$$

$$\frac{1000}{7} = 142, \dots$$

$$7 \cdot 142 = 994$$

$$7 \cdot 143 = 1001$$

$$\sum_{n=1}^{142} 7n$$

$$= 7 \frac{142 \cdot 143}{2}$$

$$= \underbrace{7 \cdot 71}_{497} \cdot 143$$

$$= \underline{71071}$$

Tall delelige med 21 og ≤ 1000

$$c_n = 21 \cdot n$$

$$n = 1, \dots, 47$$

$$21n \leq 1000$$

$$21 \cdot 47 = 987$$

$$21 \cdot 48 = 1008$$

$$\sum_{n=1}^{47} 21 \cdot n = 21 \frac{47 \cdot 48}{2} = 21 \cdot 47 \cdot 24$$

$$= 504 \cdot 47$$

$$= 23500 + 188$$

$$= \underline{23688}$$

Summen av heltall delelige med 3 eller 7 mindre enn 1000 er

$$166833 + 71071 - 23688 = 214216$$

Oppgaver

1. Finn summen av de 100 første tallene delbare med 7.

2. En aritmetisk rekke har $a_1 = 5$ og differanse $d = 3$.

Finn største antall n ledd slik at

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq 5000.$$

Hva er summen av denne rekken?

$$2 \quad n = 166 \quad \text{sum} = 49165$$