29.10.2018

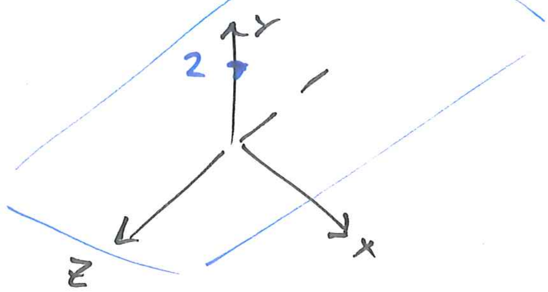
Faush

① 14.7 Plan i rommet $\mathbb{R}^3$

De er beskrevet som løsningene til likninger på formen

$$ax + by + cz = d$$

$$[a, b, c] \neq \vec{0}$$



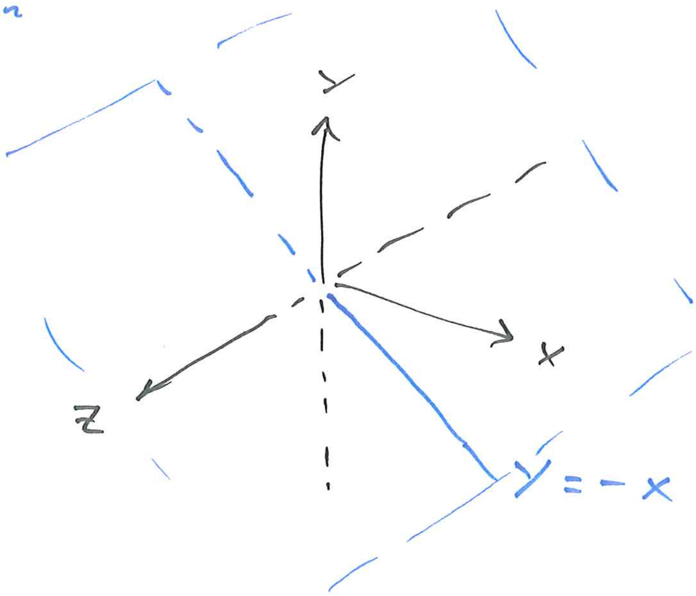
Eks 1) $z = 0$

Har løsning xy-planet

2) $y = 2$

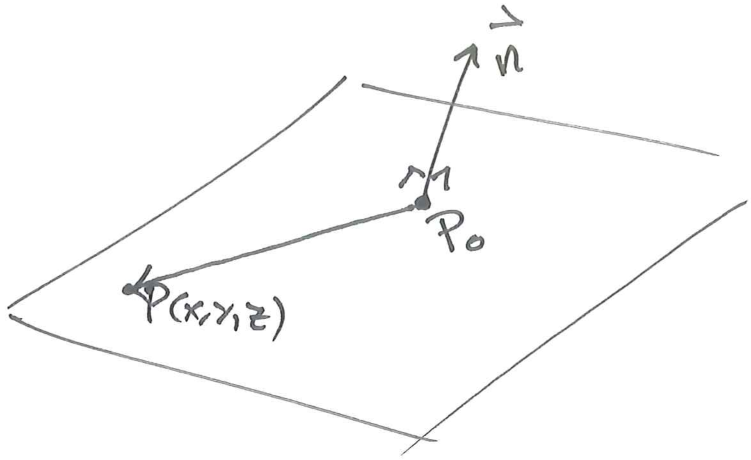
Planet som er xz-planet forskyvd to enheter i positiv y-retnin

3) $x + y = 0$



$\vec{n}$ normalvektor til planet

P_0 punkt i planet



(2)

Punktet $P(x,y,z)$ ligger i planet gjennom P_0 med normal vektor $\vec{n}$ $\Longleftrightarrow$

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$$

(samt $P = P_0$)

$$\vec{n} = [a, b, c] \qquad\qquad P_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$$

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{OP_0} \cdot \vec{n} \qquad \overrightarrow{OP_0} = [x_0, y_0, z_0], \quad \overrightarrow{OP} = [x, y, z]$$

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = (a x_0 + b y_0 + c z_0) = d$$

Finn likningen til planet gjennom $(1, -2, 3)$ med normalvektor $\vec{n} = [2, 1, -3]$

$$[2, 1, -3][x, y, z] = [2, 1, -3][1, -2, 3]$$

$$\underline{2x + y - 3z = (2 - 2 - 9 =) - 9}$$

(3) Finn en normalvektor og et punkt på planet gitt ved

$$4x - 8y + 16z = 4$$

En normalvektor er $[4, -8, 16]$

en annen (enklere) er $\underline{[1, -2, 4]}$

Punkt på planet: $x=1,\ y=z=0$ er en løsning

så $(1, 0, 0)$ et punkt

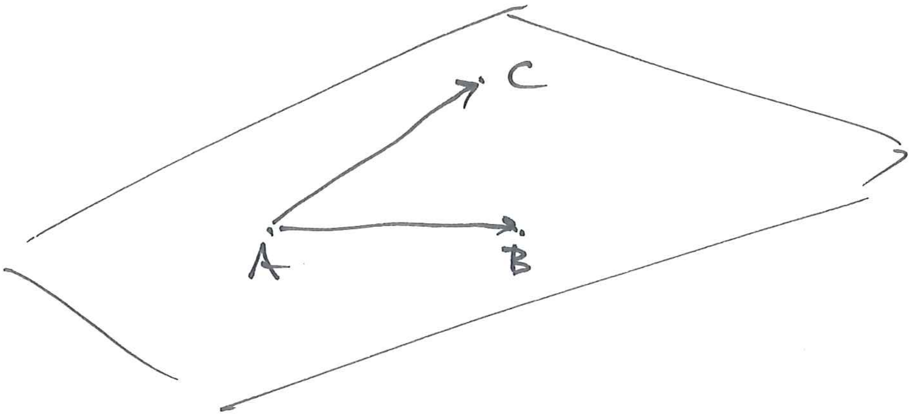
$(1, 1, \frac{1}{2})$, $(0, 0, \frac{1}{4})$, $(0, \frac{-1}{2}, 0)$ er også

punkt i planet.

Et punkt på planet er $(1, 0, 0)$ og en

normalvekto er $[1, -2, 4]$

Et plan er bestemt av tre punkter i rommet (som ikke ligger på en linje)



$\vec{AB}$ og $\vec{AC}$ er ikke parallelle (da ville A, B og C ligget på en linje)

En normalvektor til $\vec{AB}$ og $\vec{AC}$ (og da planet) er $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$.

Eks Gitt tre punkt $A(1,0,2)$, $B(-1,1,3)$ og $C(0,2,4)$

bestem likningen for planet gjennom punktene.

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [-1,1,3] - [1,0,2] = [-2,1,1]$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = [0,2,4] - [1,0,2] = [-1,2,2]$$

(5)

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}_{0} \vec{i} - \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}_{-3} \vec{j} + \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}_{-3} \vec{k}$$

$$= [0, 3, -3]$$

Vi velger normalvektoren

$$\vec{n} = \frac{1}{3} \vec{AB} \times \vec{AC} = [0, 1, -1].$$

Likningen til linjen gjennom A, B og C

er

$$[0, 1, -1] \cdot [x, y, z] = \underbrace{[1, 0, 2]}_{\vec{OA}} \cdot [0, 1, -1]$$

$$\underline{y - z = -2}$$

oppgave

Finn en likning for planet gjennom punktene $A(1,2,4)$ $B(-1,2,5)$ og $C(1,1,1)$

6

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = [-1,2,5] - [1,2,4] = [-2,0,1]$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = [1,1,1] - [1,2,4] = [0,-1,-3]$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{n}) = \underline{[1, -6, 2]}$$

$P(x,y,z)$ ligger i planet $\Leftrightarrow$

$\vec{AP} \cdot \vec{n} = 0$ $\qquad \vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}$

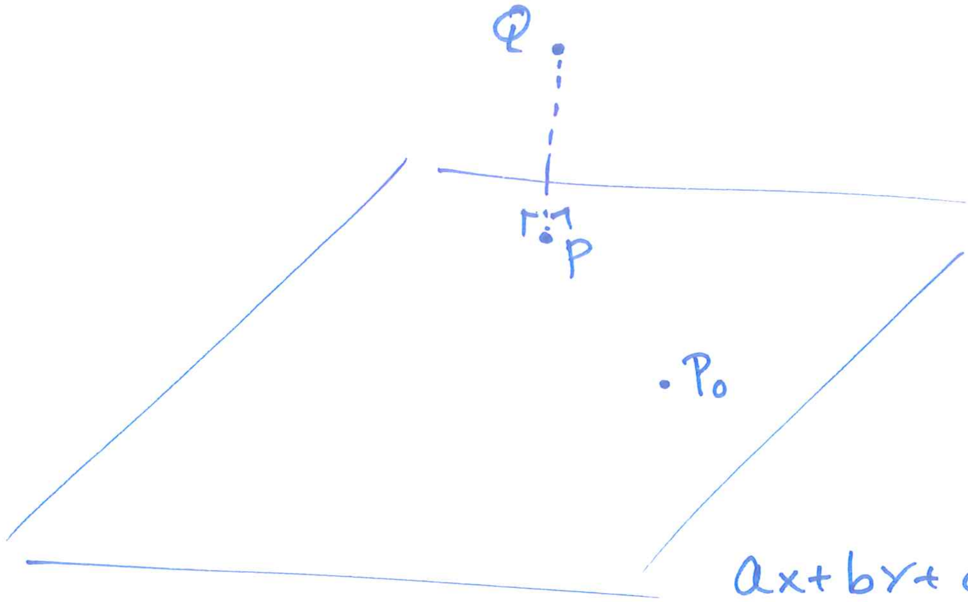
$$\vec{OP} \cdot \vec{n} = \vec{OA} \cdot \vec{n}$$

$$[x,y,z] \cdot [1,-6,2] = [1,2,4] \cdot [1,-6,2]$$

$$x - 6y + 2z = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-6) + 4 \cdot 2 = 1 - 12 + 8 = -3$$

$$\underline{x - 6y + 2z = -3}$$

(7)



$$ax+by+cz=d$$

Hva er korteste avstand fra Q til planet?
Hvor er punktet P på planet nermest Q?

P er slik at $\vec{PQ}$ står vinkelrett på planet. $\vec{PQ}$ er parallell til en normalvektor $\vec{n}$ til planet.

Så $\vec{PQ} = t \cdot \vec{n}$ $\qquad \vec{n} = [a, b, c]$

P ligger i planet:
P er slik at $\vec{OP} \cdot \vec{n} = \vec{OP_0} \cdot \vec{n} = d$

$$\vec{OQ} - \underbrace{t\vec{n}}_{\vec{PQ}} = \vec{OQ} - \vec{PQ} = \vec{OQ} + \vec{QP} = \vec{OP}$$

setter inn i likningen til planet: $\vec{OP} \cdot \vec{n} = d$

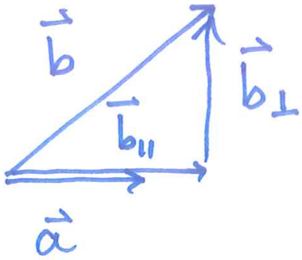
$$(\vec{OQ} - t\vec{n}) \cdot \vec{n} = d$$

$$\vec{OQ} \cdot \vec{n} - t \cdot |\vec{n}|^2 = d \qquad \text{gir } t$$

$$t = \frac{-d + \vec{OQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \qquad \text{så } \underline{\vec{OP} = \vec{OQ}} + \underline{\frac{d - \vec{OQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}}$$

Lengden er $|\vec{PQ}| = |t||\vec{n}| = \dfrac{|d - \vec{OQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ Dette er avstanden fra Q til planet

Skalarprodukt
(Prikkprodukt)



$$|\vec{b}_\parallel| = |\vec{b}|\cos(v)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}_\perp = 0$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= \vec{a}\cdot(\vec{b}_\parallel + \vec{b}_\perp)\\ &= \vec{a}\cdot\vec{b}_\parallel + \underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}_\perp}_{0}\\ &= \vec{a}\cdot\vec{b}_\parallel\\ &= |\vec{a}|\cdot|\vec{b}_\parallel|\cdot\begin{cases}1 & \vec{b}_\parallel \text{ og } \vec{a} \text{ samme retning}\\ -1 & \text{motsat retning}\end{cases}\end{aligned}$$

Vektorprodukt
(Kryssproduktet)

$\vec{a}\times\vec{b}_\parallel = 0$ ($\vec{a}$ og $\vec{b}_\parallel$ er parallelle)

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= \vec{a}\times(\vec{b}_\perp + \vec{b}_\parallel) \overset{\text{lineær}}{=} \vec{a}\times\vec{b}_\perp + \underbrace{\vec{a}\times\vec{b}_\parallel}_{0}\\ &= \vec{a}\times\vec{b}_\perp\end{aligned}$$

lengden er $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}_\perp|$ retning gitt ved høyrehans-regelen

$$|\vec{b}_\perp| = |\vec{b}|\cdot\sin v$$