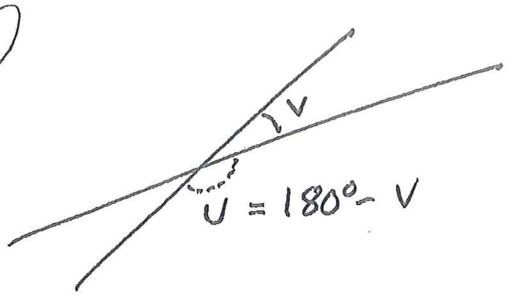
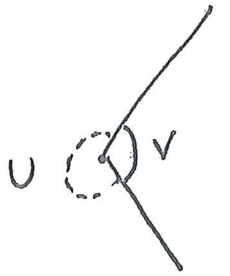
Fausk

26sep2018 Trigonometri kap 10

(1)



Vinkelen mellom to linjer som krysser er den minste av vinklene V og U.
Den er mellom 0° og 90°.

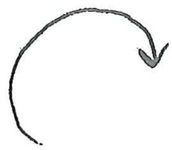


U + V = 360°

Vinkelen mellom to stråler (vektor) er den minste av vinklene V og U.
Den er mellom 0° og 180°.

Generelt gir vi vinkler en retning
(Dette krever en orientering av planet)
velger frem- og bakside til planet.

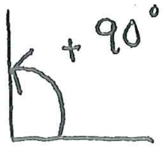
positiv retning

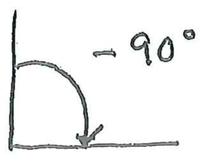


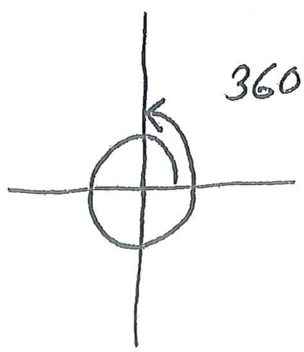
negativ retning

mot urviseren

Tilater flere omløp.

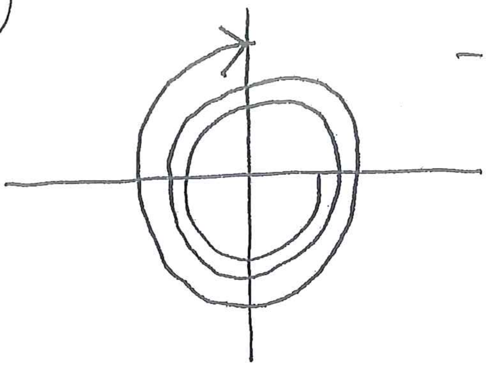




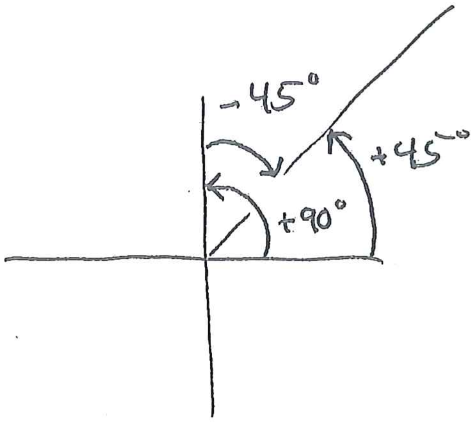


$360° + 90° = 450°$

2



$$-360° - 360° - 270° = -990°$$



$$+90° + (-45°) = +45°$$

Vinkler kan adderes og de har invers og et enhets element.

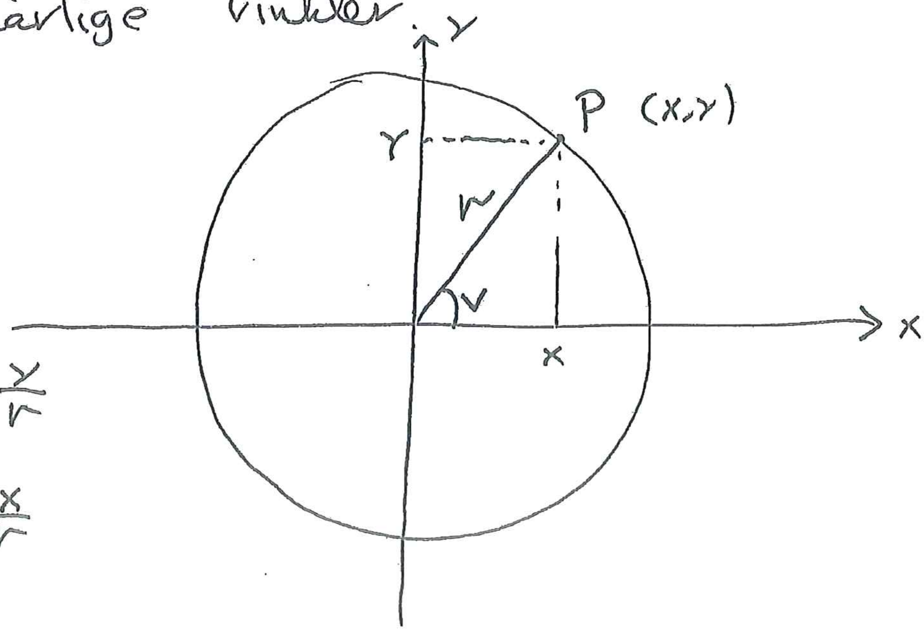
$$V + 0 = V$$

enhetselement

$$V + (-V) = 0$$

inverselement.

Vi utvider sin og cos til vilkårlige vinkler.

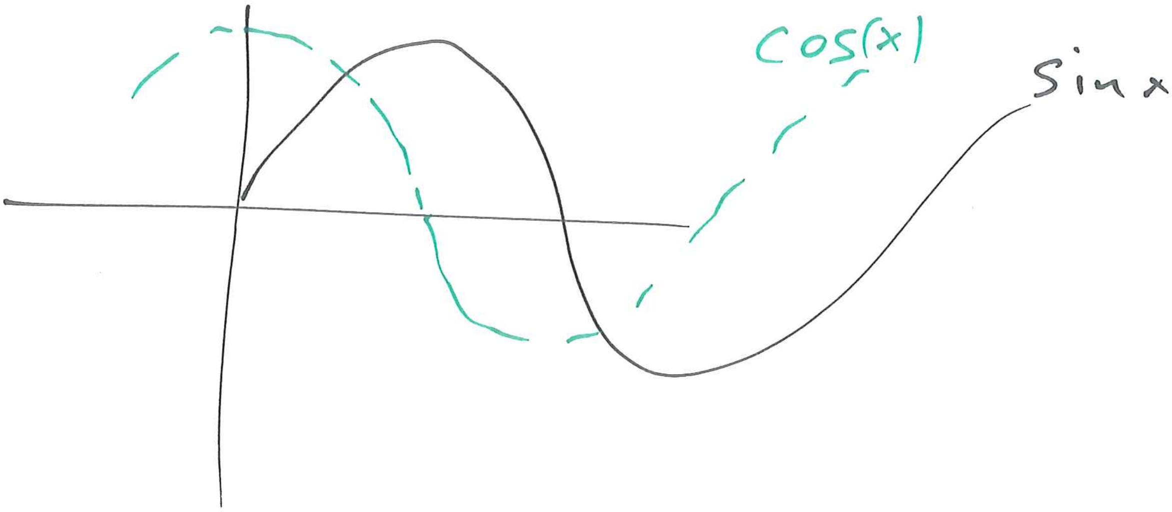


$$\sin(v) = \frac{y}{r}$$

$$\cos(v) = \frac{x}{r}$$

(2 ½)

$$\sin V = \cos(90° - V)$$
$$= \cos(-(90° - V))$$
$$= \cos(-90° + V) = \cos(V - 90°)$$

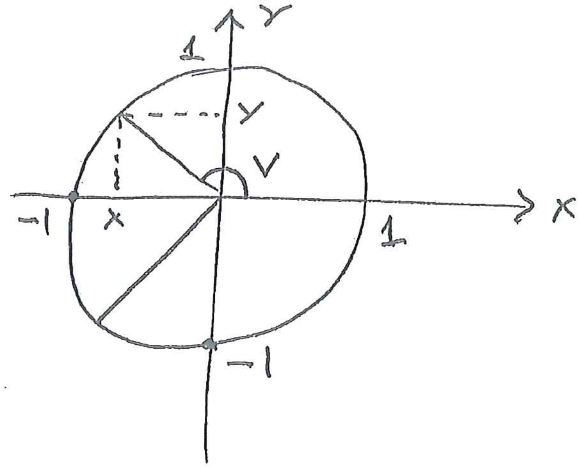


Grafen til $\sin(x)$ er lik grafen til $\cos x$, forflyttet med $\frac{\pi}{2}$ rad (90°) til høyre

Generelt er grafen til $f(x-a)$ lik grafen til $f(x)$ forskyvd med a til høyre. (verdien til $f(x-a)$ i $y+a$ er: $f(y)$.)

Tegna grafen til $\sin(x)$, $\arcsin(x)$, $\frac{1}{\sin(x)}$
$\cos(x)$, $\arccos(x)$
og $\tan(x)$
i geogebra.

(3) Vi velger $r = 1$. Sirkelen med senter i origo og radius lik 1 kalles enhetssirkelen



$\sin(v) = y$

$\cos(v) = x$

$v = 180°$ $\quad \cos(180°) = -1$ og $\sin(180°) = 0$

$v = 270°$ $\quad \cos(270°) = 0$ og $\sin(270°) = -1$

$v = 225° = 180° + 45°$ $\quad \cos(225°) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \sin(225°)$.

$v = 420° = 360° + 60°$ $\quad \cos(420°) = \cos(60°) = \frac{1}{2}$

$\sin(420°) = \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$v = 360°$ $\quad \cos(360°) = \cos(0°) = 1$

$\sin(360°) = \sin(0°) = 0$

For alle vinkler v vil $\sin(v)$ og $\cos(v)$ ta verdier mellom -1 og 1.

Sin og cos er periodiske funksjoner med periode $360°$.

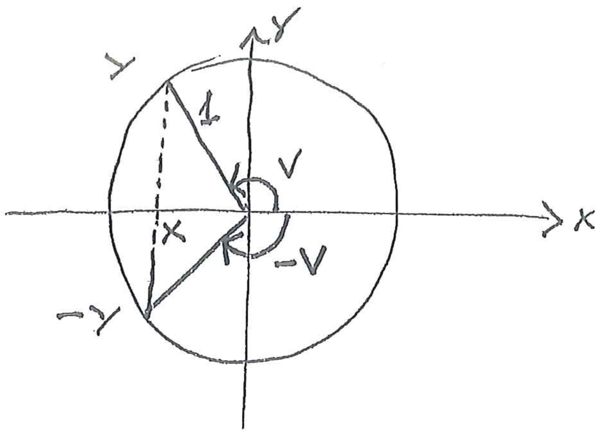
$\sin(v + 360°) = \sin(v)$

$\cos(v + 360°) = \cos(v)$

(og 360° er det minste positive tallet med denne egenskapen)

Refleksjon om x-aksen

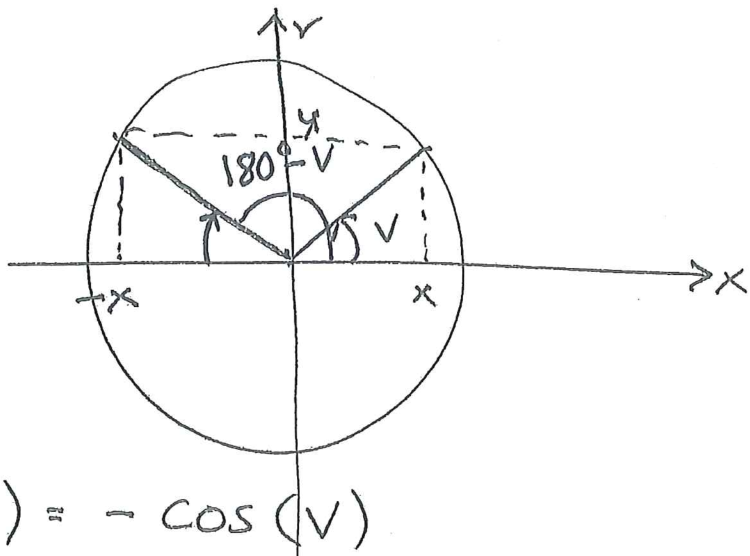
(4)



$\cos(-v) = \cos(v)$ (x-koordinaten)

$\sin(-v) = -\sin(v)$ (y-koordinaten)

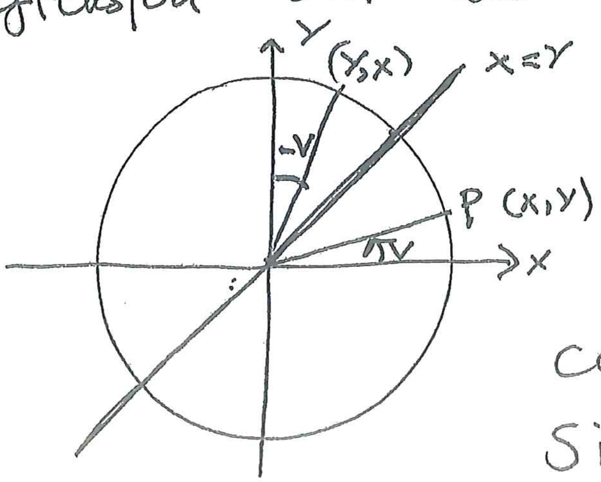
Refleksjon om y-aksen



$\cos(180° - v) = -\cos(v)$

$\sin(180° - v) = \sin(v)$

Refleksjon om aksen x = y



Bytter om x og y-koordinatene.

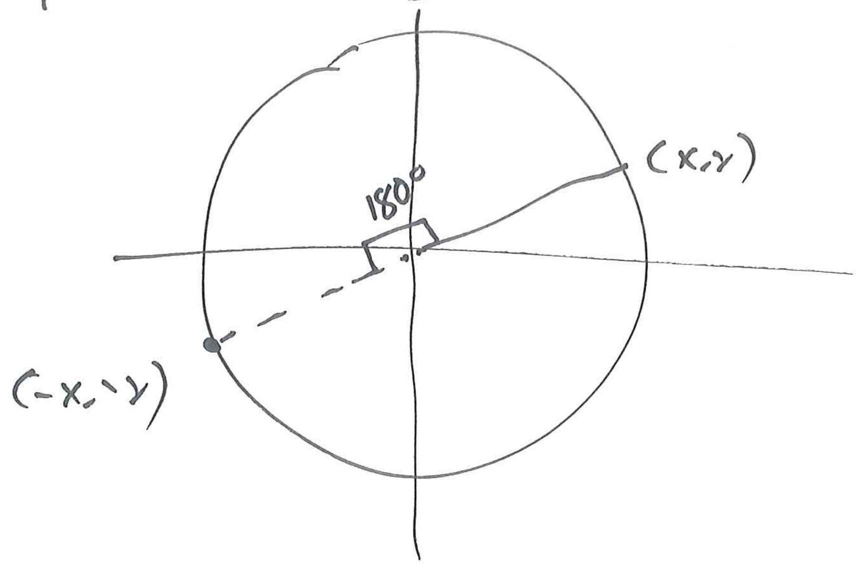
Vinkelen v sendes til vinkelen 90° - v.

$\cos(90° - v) = \sin(v)$

$\sin(90° - v) = \cos(v)$

Refleksjon om origo

4.5



$$\cos(v+180°) = -\cos(v)$$

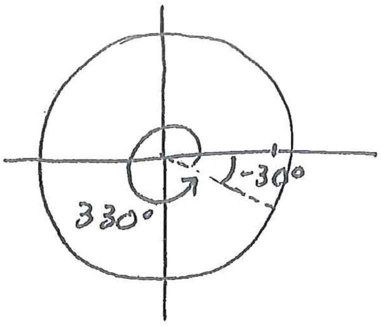
$$\sin(v+180°) = -\sin(v)$$

så $$\frac{\sin(v+180°)}{\cos(v+180°)} = \frac{-\sin(v)}{-\cos(v)} = \tan(v)$$

$$\tan(v+180°) = \tan(v)$$

Finn sin og cos til $330°$ $(360° - 30°)$

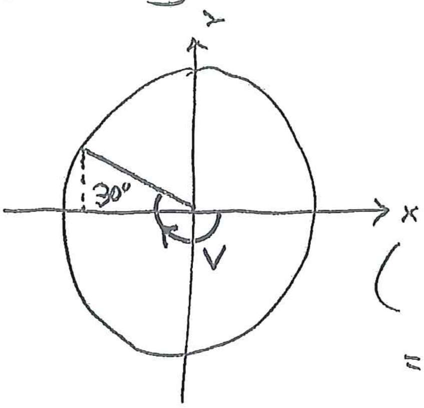
(5)



$$\cos(330°) = \cos(360° - 30°) = \cos(-30°)$$
$$= \cos(30°) = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\sin(330°) = \sin(360° - 30°) = \sin(-30°)$$
$$= -\sin(30°) = \underline{-\frac{1}{2}}$$

Finn sin og cos til $v = -210°$.
$$= -180° - 30°$$



$$\cos(-210°) = \underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Big(\cos(-210 + 360°) = \cos(150°)$$
$$= -\cos(180° - 150°) = -\cos 30°$$
$$= -\sqrt{3}/2 \Big)$$

$$\sin(-210°) = \underline{1/2}$$

<u>oppgave.</u>

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$$ def. for $v \neq 90° + 180° \cdot n$ n heltall

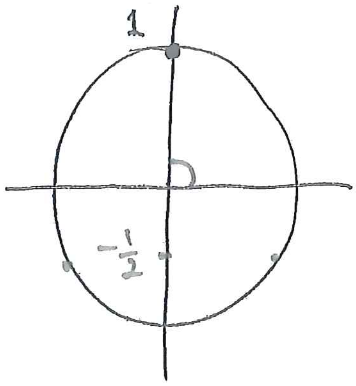
1) $\tan(v)$ er periodisk med periode $180°$ $\tan(v + 180°) = \tan(v)$ alle v

2) $\tan(90° - v) = \dfrac{1}{\tan(v)}$ når definert.

(6) 7.3 Trigonometriske likninger:

Likninger som involverer trigonometriske funksjoner.

Eksempler $\sin(V) = 1$. (påstand. Løsningene er V slik at påstanden blir sann)



Løsningene er

$90°$, $-270°$, $450°$ etc.

$V = 90° + 360° \cdot n$ heltall n.

(uendelig mange løsninger)

$\sin(V) = \frac{-1}{2}$

$V = -30°$ og $210°$ samt hele omløp av disse

$V = -30° + 360° \cdot n$

$V = 210° + 360° \cdot n$

heltall n.

($-30° + 360° \cdot n$ n heltall er samme mengde som $330° + 360° \cdot m$ m heltall)

$\sin(v) = 2$ tom løsning.

7

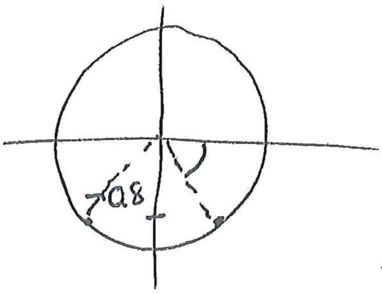
$4\sin v + 5 = 0 \qquad v \in [0, 360^\circ\rangle$

$4\sin v = -5$

$\sin v = -5/4 = -1.25$ ingen løsning

$5\sin v + 4 = 0 \qquad v \in [0, 360^\circ\rangle$

$\sin v = \frac{-4}{5} = -0.8.$



$\arcsin(-0.8) = -53.1^\circ$

(Benytter $\sin v = \sin(180^\circ - v)$)

$\downarrow$

en annen løsning er derfor

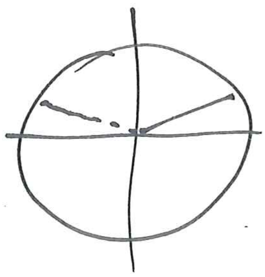
$180^\circ - (-53.1^\circ) = 233.1^\circ$

(trekker vi 360° fra denne får vi -126.9°).

$360^\circ + (-53.1^\circ) = \underline{306.9^\circ}$

Løsningen er $\underline{\{233.1^\circ, 306.9^\circ\}}$

$\sin^2 v + \sin v - \frac{3}{4} = 0$



2. grads uttrykk i $\sin(v)$

$(\sin v + \frac{3}{2})(\sin - \frac{1}{2}) = 0$

$\sin v = -3/2$ ingen løsning for v

$\sin v = \frac{1}{2}$

Løsningene er $30^\circ + 360^\circ \cdot n$ n heltall.

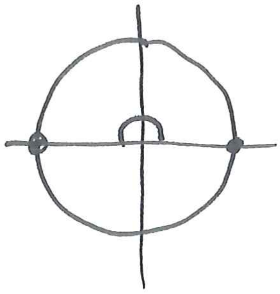
$150^\circ + 360^\circ \cdot n$

oppgave

8

Finn alle vinkler V slik at

$$\sin(V) = 0$$

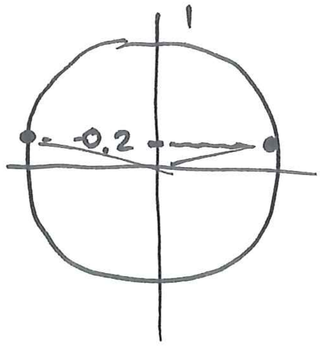


$$V = 0° + 360° \cdot n$$

og $V = 180° + 360° \cdot n$ heltall n

Eksempel

$$\sin(v) = 0.2$$



$$\arcsin(0.2) \approx 11.537°$$

$$\underline{V = 11.537° + 360° \cdot n}$$

og $V = (180° - 11.537°) + 360° \cdot n$

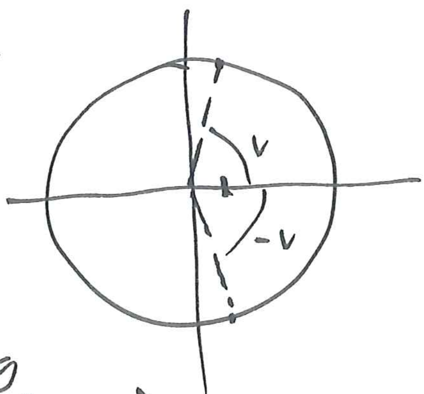
$$V = \underline{168{,}463° + 360° \cdot n}$$

heltall n

oppgave:

Løs likningen

$$\cos(V) = 0.2$$



$$\arccos(0.2) = 90° - 11.537°$$

$$= 78.463°$$

-78.463 er også en løsning (reflektert om x-aksen)

Løsningene er

$$V = 78.463° + 360° \cdot n$$

og $V = -78.463° + 360° \cdot n$

Invers trigonometriske funksjoner

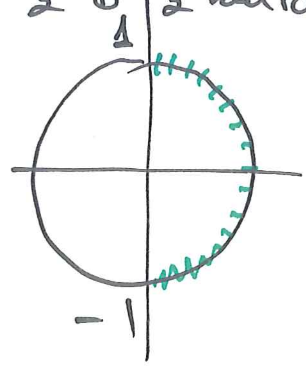
$\arcsin(y) = \sin^{-1}(y)$ definert for

(9) $y \in [-1, 1]$

$\arcsin(y)$ er vinkelen x mellom

-90 og $90°$ ($-\frac{\pi}{2}$ og $\frac{\pi}{2}$ radianer)

slik at $\sin(x) = y$



$\arccos(x) = \cos^{-1}(x)$ er definert for

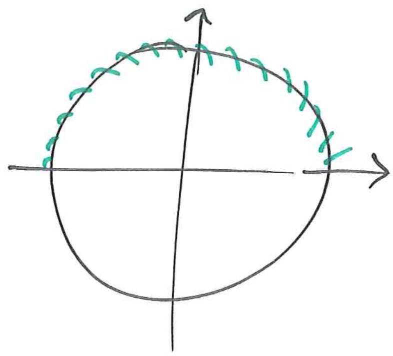
$x \in [-1, 1]$.

$\arccos(x)$ er vinkelen v mellom

0 og $180°$

(0 og π radian)

slik at $\cos(v) = x$



$\arctan(z) = \tan^{-1}(z)$ definert for alle z

$\arctan(z)$ er vinkelen v i $\langle -90°, 90° \rangle$

slik at $\tan(v) = z$.

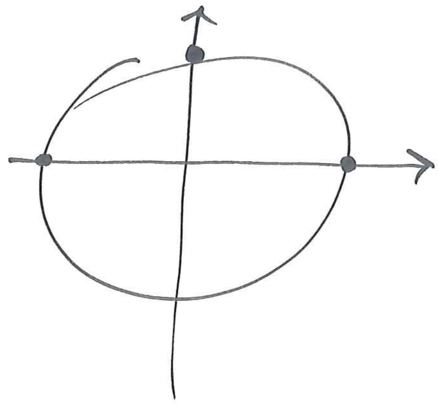
Løs likningen

(10) $$\sin^2 v = \sin v$$

$$\sin^2 v - \sin v = 0 \Leftrightarrow \sin(v)(\sin v - 1) = 0$$

$\sin v = 1$ $\qquad$ $\underline{90^\circ + 360 \cdot n}$

$\sin v = 0$



$\underline{0^\circ + 360^\circ \cdot n}$

$\underline{180^\circ + 360^\circ \cdot n}$