10 sep. 2018 (reelle) Funksjoner Fanuk

Funksjon f kommer med en definisjonsmengde

1 D_f

En funksjon f tilordner ett reelt tall til hver $x \in D_f$.

Verdien den tilorder til x skrives $f(x)$
(funksjonsverdien i x)

$f(x)$ benyttes også til å betegne funksjonen (hvor x er en ubestemt variabel)

Eksempler

- $f(x) = 2x - 1$ $D_f = \mathbb{R}$
  Funksjonsverdien i $x=3$ er : $f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$

- $k(x) = \sqrt{x}$ $D_f = [0, \infty\rangle$
  $k(9) = \sqrt{9} = 3$ etc.

- 2^x eksponentfunksjon ($D_f = \mathbb{R}$)

- x^n potensfunksjoner ($D_f = \mathbb{R}$, n nat. tall)

- Funksjoner trenger ikke være gitt ved en "formel". p $D_f = \mathbb{N}$ naturlige tall
  $p(n)$ = primtall nummer n
  (etter størrelse)

En likning vil av og til gi en funksjon

$y = x^2 - 1$ gir y som en funksjon av x. $D_f = \mathbb{R}$

2

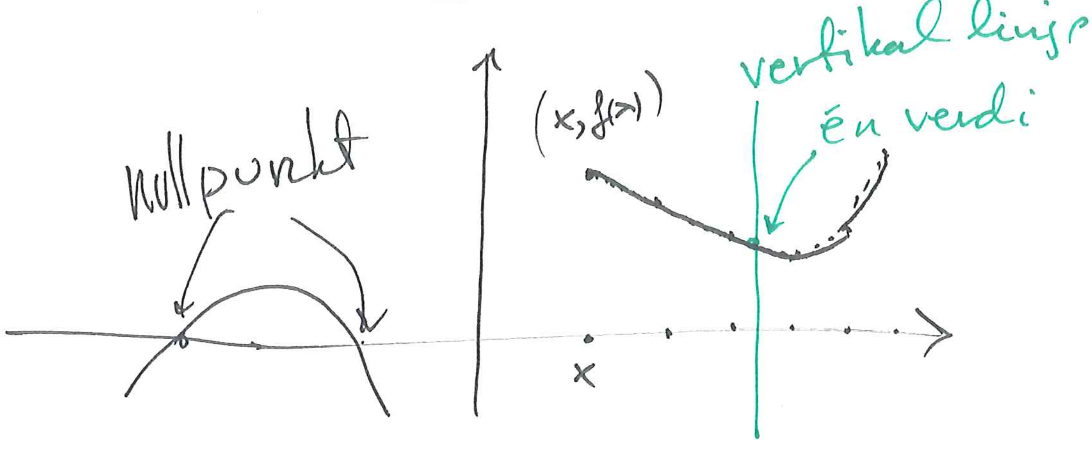
x er ikke en funksjon av y:

$x^2 = y + 1$ må ha $y \geq -1$ for at det skal finnes en løsning

$y \geq -1$: $x = \sqrt{y+1}$ eller $x = -\sqrt{y+1}$ ikke én verdi for x!

(Men vi kan velge ut en løsning for hver y og få en funksjon. For eksempel $x = -\sqrt{y+1}$)

Graf til en funksjon



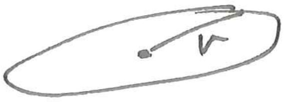
En funksjon f kan gi opphav til likningen

$f(x) = k$

Verdier x slik at $f(x) = 0$ kalles nullpunkt

(løsningen til likningen $f(x) = 0$)

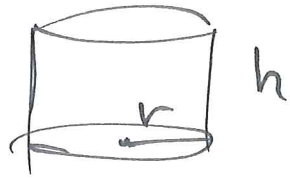
(3)



Arealet til en disk (sirkel) er en funksjon av radien r

$$A(r) = \pi r^2$$

Volumet til en sylinder



er en funksjon av de to variablene r og h

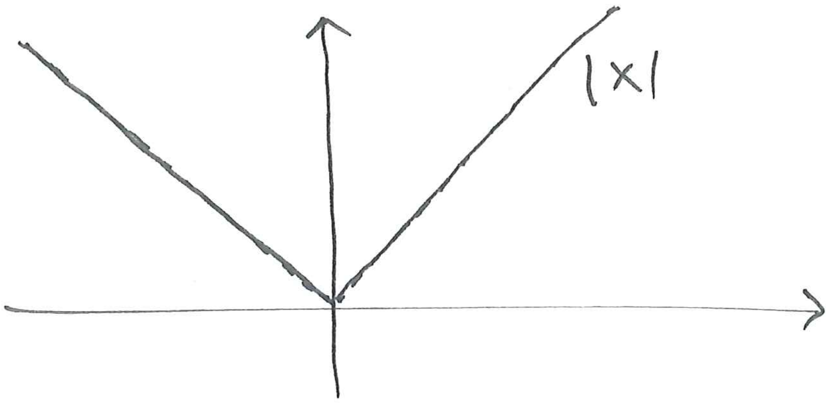
$$V(r,h) = \underline{\pi r^2 \cdot h}$$

Flere eksempler

Absoluttverdifunksjonen

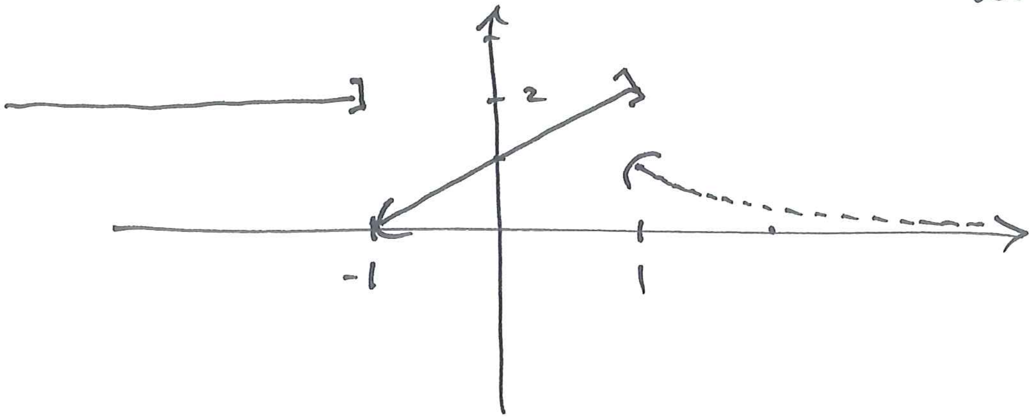
delt forskrift

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



(4) $g(x) = \begin{cases} 2 & x \leq -1 \\ x+1 & -1 < x \leq 1 \\ 1/x & x > 1 \end{cases}$

funksjon definert med bruk av delt forskrift

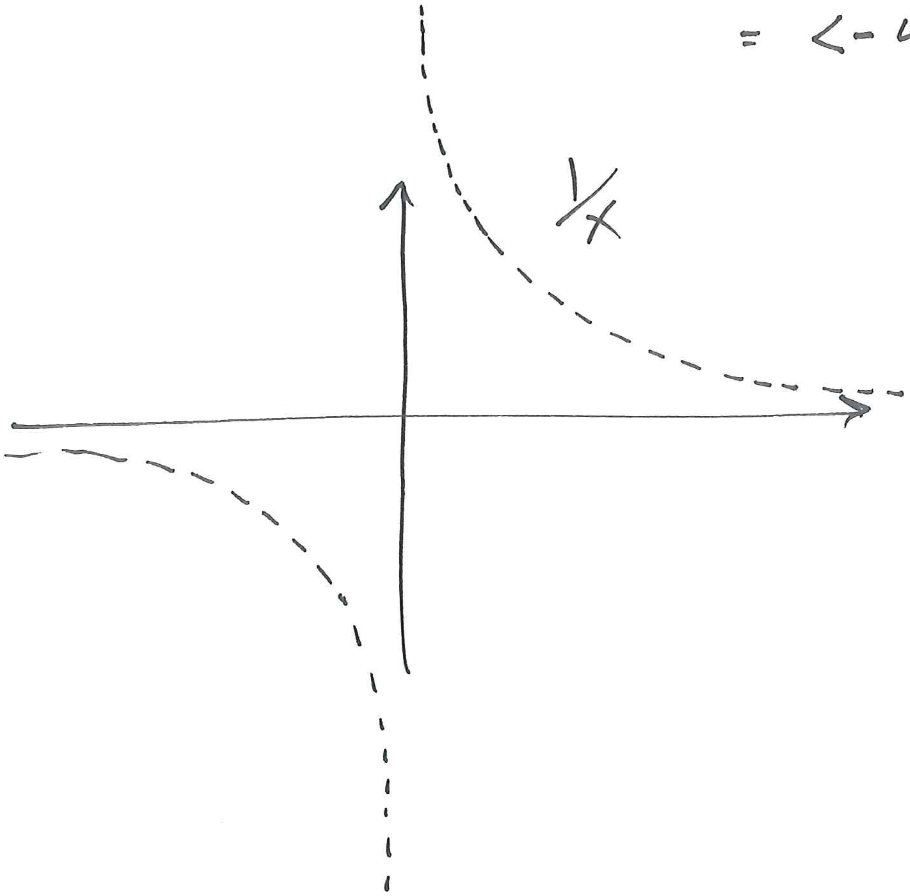


Grafen til $f(x) = \frac{1}{x}$

naturlige definisjons-mengde

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$= \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 0, \infty \rangle$

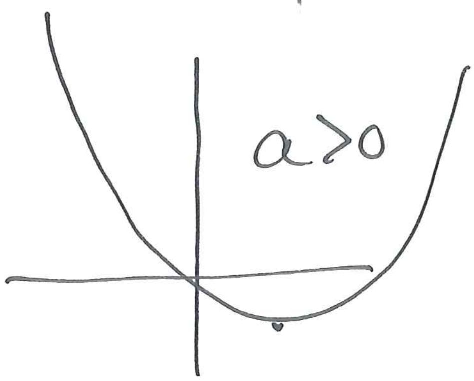


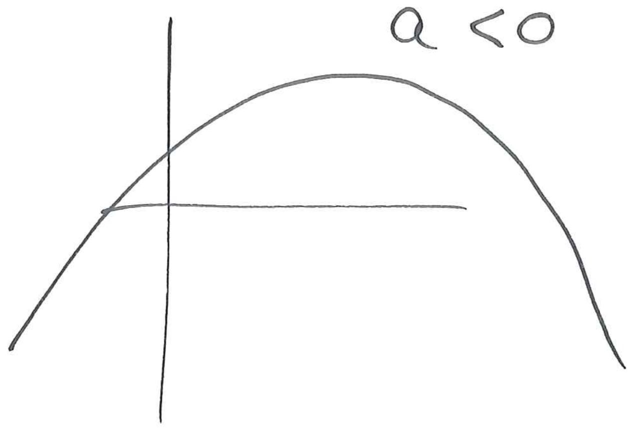
Naturlig definisjonsmengde til et uttrykk er den største definisjonsmengden hvor uttrykket gir mening.

Andregradsfunksjoner

5 $p(x) = ax^2 + bx + c$ for verdier av a, b, c

$a \neq 0$ Grafen kalles en parabel





Skisser grafen til $p(x) = x^2 + 2x + 3$

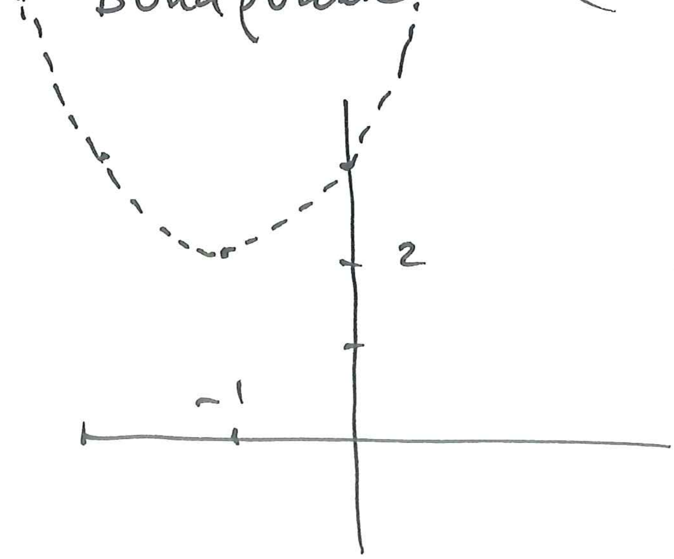
Fullfører kvadratet

$$p(x) = (x+1)^2 - 1^2 + 3 = (x+1)^2 + 2$$

$p(x)$ er minst når $(x+1)^2$ (≥ 0) er lik 0. Det er for $x = -1$.

Funksjonsverdien er der $p(-1) = 2$.

Bunnpunktet $(-1, 2)$



$p(0) = 3$

$p(-2) = 3$

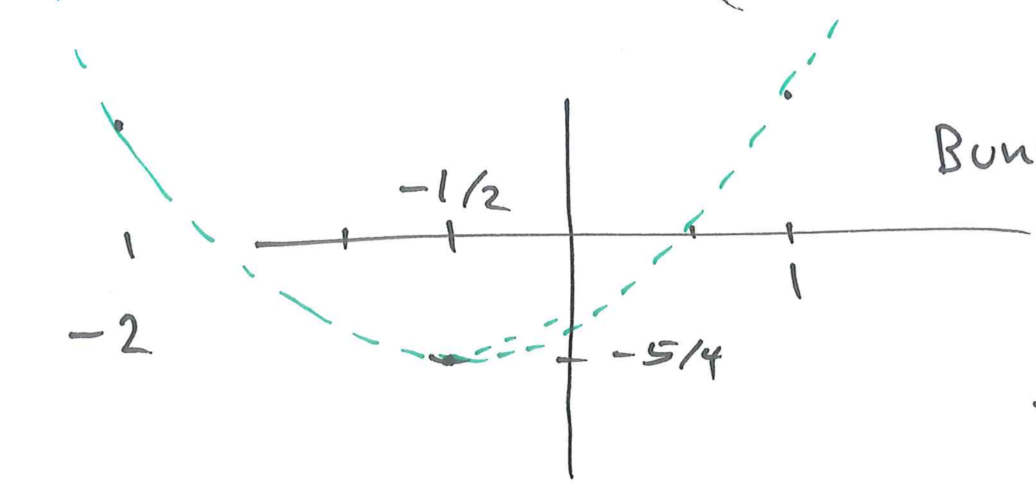
Skisser grafen til $y = x^2 + x - 1$

(6) Hva er bunnpunktet?

Fullfører kvadratet

$$x^2 + x - 1 = \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 1$$

$$= \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$



Bunnpunkt $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$

$y(1) = 1 + 1 - 1 = \underline{1}$

$y(-2) = (-2)^2 - 2 - 1$

$= 4 - 3 = 1$

(selvsagt)

$$p(x) = -x^2 - 8x - 17$$

$$= -\left[x^2 + 8x + 17\right]$$

$$= -\left[(x+4)^2 + 1\right] = \underbrace{-(x+4)^2}_{\leq 0} - 1$$

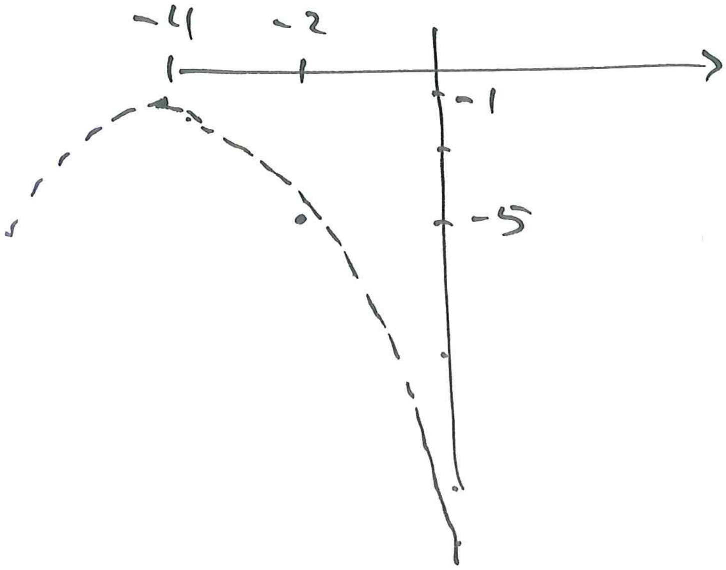
det er lik 0 når

$x + 4 = 0$, så $\underline{x = -4}$

$p(-4) = -1$

Toppunktet er

$(-4, -1)$



Oppgave 3.53 i boken.

$$x^2 + bx + 4 = 0$$

Hva er # (antall) løsninger for ulike verdier av b?

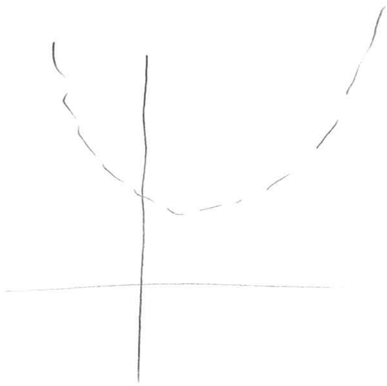
Forslag til løsning

Løsningene er

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 16}}{2}$$

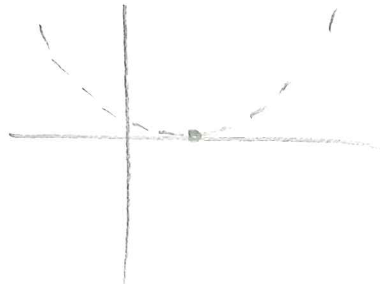
$b^2 < 16$ ingen løsning

$-4 < b < 4$



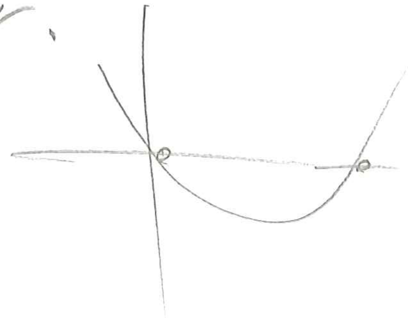
$b^2 = 16$

$b = \pm 4$ én løsning



$b^2 > 16$ to løsninger.

$b > 4$ eller $b < -4$



Eksempel

Irrasjonal likning (5.8 i boka)

Løs likningen $\sqrt{x-1} = 3 - x$

Benytter følgende: Hvis $a = b$, så er
$a^2 = b^2$

Det motsatte er ikke sant: $a^2 = b^2$ selv
om $a \neq b$ (da er $a = -b$)

$(-2)^2 = 4 = 2^2$

Kvadrerer begge sider i $\sqrt{x-1} = 3-x$

$\Downarrow$ implikasjon

$(\sqrt{x-1})^2 = (3-x)^2$

$x-1 = (3-x)^2$

Løsningen er $\underline{\underline{x=2}}$
(x=5 er en "falsk løsning")

$x - 1 = 3^2 - 2\cdot 3 \cdot x + (-x)^2 = 9 - 6x + x^2$

flytter over

$x^2 - 6x - x + 9 + 1 = x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x-5)(x-2) = 0$

så $x = 2$ og $x = 5$ (løsningene til $\sqrt{x-1} = 3-x$ må være blant disse.) Sjekker om de er løsninger:

$x=2: \sqrt{1} = 3-2 = 1$ ✓ | $x=5: \sqrt{4} = 2 \neq 3-5 = -2$ |
FALSK