3 sep. 2018

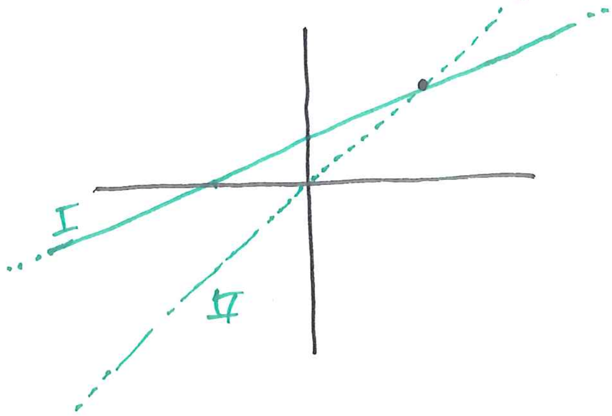
3.1 Likningssystemer

Fauske

Lineær likning $ax + by = c$ i to variabler x og y

(1) $-3x + 5y = 2$

Løsningen er alle par (x, y) slik at likningen (påstanden) er sann.



Likningssystem: to eller flere likningen som skal oppfylles

Eks

$$\text{I} \quad -3x + 5y = 2$$
$$\text{II} \quad x - y = 0$$

Insetningsmetoden. uttrykker y ved hjelp av x

II : $y = x$

setter dette inn for y i likning I

$$\underbrace{-3x + 5(x)}_{} = 2$$

$$2x = 2 \qquad \text{deler med 2 på begge side}$$

$$x = 1$$

siden $y = x$ så er løsningen $x = 1$ og $y = 1$

punktet $(1, 1)$

Alternativ metode å løse lineære likningssett

(2) vi kombinerer likningene til vi får enklere (og ekvivalente) likningssystem hvor vi får isolert variablene

I $-3x+5y=2$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $-3x+5y=2$

II $x-y=0$ $\quad\quad\quad\quad$ $5x-5y=0$

(ganget II med 5 på begge sider)

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} -3x+5y+(5x-5y) &= 2+0 \\ 5x-5y &= 0 \end{aligned}$$

lag +5II til I

5II

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 5x-3x &= 2 \\ 5x-5y &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2x &= 2 \\ x-y &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad x=1 \text{ og } y=x=1.$$

Eksempel I $6y-3x=1$

II $2x+3y=3$

$$\text{II} \Leftrightarrow \quad 3y = 3-2x \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3-2x}{3} = 1-\frac{2}{3}x$$

Setter inn i I

$$6\left(1-\frac{2}{3}x\right)-3x=1$$

$$6-6\cdot\frac{2}{3}x-3x=1$$

$$6-4x-3x=1$$

$$-7x=1-6=-5$$

$$x=\frac{-5}{-7}=\underline{\frac{5}{7}}, \quad y=1-\frac{2}{3}\left(\frac{5}{7}\right)=1-\frac{10}{21}=\frac{21}{21}-\frac{10}{21}=\underline{\frac{11}{21}}$$

Løsningen er $x=\frac{5}{7}$, $y=\frac{11}{21}$.

Oppgave : Løs likningssystemet

(3) I $2x-5y=1$

II $x+y=4$

II $\Leftrightarrow$ $y=4-x$

setter dette inn i I :

$2x-5(4-x)=1$

$2x-20+5x=1$

$7x=1+20=21$

$x=21/7=\underline{3}$ så $y=4-x=4-3$
$\underline{=1}$

Løsningen er $\underline{x=3 \text{ og } y=1}$

Eksempel 10 personer går på kino
De betaler 700kr for billettene.

Pris: 100kr voksne
50 kr barn.

Hvor mange av personene er barn?

V antall voksne B antall barn

(I) $V+B=10$

Billettene koster : $100\cdot V+50\cdot B=700$ (II)

$B=10-V$ setter inn i II

$100\cdot V+50\cdot(10-V)=700$ (deler med 10)

$10\cdot V+50-5V=70$

(4) $5V = 70 - 50 = 20$

$V = 20/5 = 4$

$B = 10 - V = 10 - 4 = \underline{6}$

Antall barn $\underline{\text{er } 6}$

Ikke-lineært likningssystem

(I) $x^2 + y = 3$ (II) $y - 2x = 4$

II $\Leftrightarrow$ $y = 4 + 2x$ sette inn i I $x^2 + 4 + 2x = 3$

$x^2 + 2x + (4 - 3) = 0$

én løsning

$(x^2 + 2x + 1) = 0$

$(x+1)^2 = 0$ så $x = \underline{-1}$

$y = 4 + 2(-1) = \underline{2}$

$x^2 - y = 3$

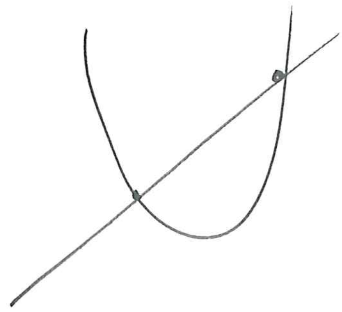
$y - 2x = 4$

$y = 4 + 2x$

setter inn $x^2 - (4 + 2x) = 3$

$x^2 - 2x - 4 - 3 = 0$

$\underbrace{x^2 - 2x}_{(x-1)^2 - 1} - 7 = 0$



$(x-1)^2 - 8 = 0$

$(x-1)^2 = 8$

$x - 1 = \pm\sqrt{8}$

$x = 1 \pm \sqrt{2 \cdot 4}$

$= 1 \pm \sqrt{2} \cdot 2$

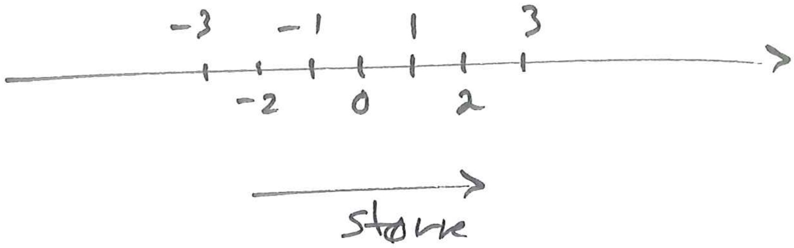
Løsningene er

$x = 2\sqrt{2}$ og $y = 6 + 2\sqrt{2}$

og $x = -2\sqrt{2}$ og $y = 6 - 2\sqrt{2}$

3.3 De reelle tall er total ordnet

5



$2 < 3$

$-3 < -2$

$0 < 5$

To tall er enten like eller så er det ene mindre enn det andre

$x < y$ "x mindre enn y" $\Leftrightarrow$ $y > x$ "y større enn x"

$x \leq y$ = "x mindre enn eller lik y"

$x < y$ eller $x = y$

(Skrives også som $x \leqq y$, $x \leq y$)

Tilsvarende for $y \geqslant x$ ...

$$x < y \iff x + a < y + a$$

$2 < 3$ $\qquad$ $2 + 4 < 3 + 4$

$\qquad\qquad$ $6 < 7$

$$x < a < y \iff x < y - a$$

(lagt til $-a$ på begge sider)

(6) $-x + 3 < 5$ legge til x på beggesida

-5

$\underbrace{(-x+x)}_{0} + 3 < 5 + x$

$3 + (-5) < (5-5) + x$

$\underline{-2 < x}$

$-2 < 3$ ganger med 5 på beggesida

$-10 < 15$

——— (-5) ———

$10 > -15$

ulikheten er snudd!

$x < y \iff 0 < y - x$

Hvis $a > 0$, da er $a(y-x) > 0 \iff y - x > 0$

$\iff ay - ax > 0$

$\iff ay > ax$

$\iff ax < ay$ $a > 0$

Hvis $a < 0$ da er $0 < y - x$ $\iff 0 > a(y-x)$

negativ!

$\iff 0 > ay - ax$

$\iff ax > ay$

snudd

$x < y$	$a > 0$	$ax < ay$	ulikheten bevares
	$a < 0$	$ax > ay$	ulikheten snus

Eksempler $\quad -3x + 2 > 0$

7

$\Leftrightarrow \quad -3x > -2$ deler med -3 på begge sider. (ganger med $\frac{-1}{3} < 0$)

snur ulikheten $\Leftrightarrow \quad x < \frac{-2}{-3}$

$\Leftrightarrow \quad \underline{x < \frac{2}{3}}$

oppgave a) $5x \geq 10$

b) $5x^2 \geq 10x$

---

a) $5x \geq 10$ (ganger med $\frac{1}{5}$ på begge sider)

$\Leftrightarrow \quad x \geq \frac{10}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x \geq 2}$

b) $5x^2 \geq 10x \Leftrightarrow \quad x^2 \geq 2x$

$x = 0 \qquad 0^2 = 2 \cdot 0 \quad \checkmark$

$x > 0 \qquad 5x^2 \geq 10x \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 2 \quad \checkmark$

$x < 0 \qquad 5x^2 \geq 10 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 2$

$(\frac{1}{5x} < 0)$ ulikhen snus!

så løsningene er alle $x \leq 0$ samt alle $x \geq 2$

Alternativt: faktorisere $\quad 5x^2 \geq 10x \Leftrightarrow 5x^2 - 10x \geq 0$

$5x(x-2) \geq 0$

$\vdots$

(8)

$$2x+7<5x+3$$

$$\Leftrightarrow \quad 0<\underbrace{(5x+3)-(2x+7)}_{5x+3-2x-7}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0<3x-4$$

$$\Leftrightarrow \quad 4<3x$$

$$\Leftrightarrow \quad 4/3<x \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x>4/3}}$$

oppgave løs ulikheten

$$-7x-3>-2(x-3)$$

Finn tallene slik at summen deres er lik produktet deres

(9) Tall x, y

$$x + y = x \cdot y$$

Eks $\quad 2+2 = 2\cdot 2 \qquad 0+0 = 0\cdot 0$

Eneste heltallsløsningene.

Det er uendelig mange reelle løsninger

$$x + y = x\cdot y \iff x = x\cdot y - y = y(x-1)$$

så $\quad y = \frac{x}{x-1} \qquad x \neq 1$

Så for alle $x \neq 1$ er $\left(x, \frac{x}{x-1}\right)$ en løsning

$x=7$: $\left(7, \frac{7}{6}\right)$, $x=-1$: $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ ...

For heltall x er $y = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$

et heltall bare når $x - 1 = +1$ eller -1.

Det vil si $x = 0$ eller $x = 2$