

19 Sannsynlighetsregning

Utfallsrom S en mengde.

Utfall er elementene i S .

Hvert stokastisk forsøk gir ett utfall.

Eks Mynt - Knon $S = \{M, K\}$
utfallene er M eller K .

Eks Terning $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

En hendelse er en delmengde av S

Eks for Mynt - Knon : $\emptyset, \{M\}, \{K\}, \{M, K\}$.

Terning :

Tre eller større : $H = \{3, 4, 5, 6\}$

Vi får et partall : $K = \{2, 4, 6\}$

$H \cap K = \{4, 6\}$ både være et partall og minst 3.

$H \cup K = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ minst 3 eller et partall.

$S - K = S \setminus K = \{1, 3, 5\}$ illike et partall
komplementet (oddetall)

Generelt : A, B to hendelser ($\subset S$)

$A \cup B$ hendelsen A eller B

$A \cap B$ — A og B

$S \setminus A = \bar{A}$ — illike- A .

Anta utfallsrommet S er endelig

$x \in S$ et utfall

Sannsynlighet for utfall x

$$P(\{x\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\# \text{ utfall } x}{n}$$

n antall forsøk.

gunstige utfall for H (iH)

H hendelse $P(H) = \lim_{n \rightarrow \infty}$

$$P(H) = \sum_{x \in H} P(\{x\})$$

Eks Tering.

Rettførdig tering

$P(\{i\})$ er like for $i=1, \dots, 6$.

Så $P(\{i\}) = \frac{1}{6}$

H : minst tre.

$$P(H) = P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\})$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{6} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

tilsvarende $P(K) = \frac{1}{2}$.

Egenskaper til P

$$P(S) = 1$$

$$0 \leq P(H) \leq 1 \text{ alle hendelser } H$$

A, B er disjunkte hendelser $A \cap B = \emptyset$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Generelt for to utfall A og B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\left(\begin{array}{l} C \subset A \\ A \setminus C \text{ og } C \text{ disjunkte} \\ A \setminus C \cup C = A \\ P(A \setminus C) + P(C) = P(A) \\ P(A \setminus C) = P(A) - P(C) \end{array} \right)$$

$$A \cup B = A \cup B \setminus A \cap B \dots$$

disjunkt

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$\left(A, \bar{A} \text{ er disjunkte og } A \cup \bar{A} = S \right)$$

To utføll A og B

$$P(A) = 0.5$$

$$P(B) = 0.7$$

Hva kan $P(A \cap B)$ være?

$$1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$1 \geq \underbrace{0.5 + 0.7}_{1.2} - P(A \cap B)$$

$$\underline{P(A \cap B) \geq 0.2}$$

$$A \cap B \subseteq A, B$$

$$P(A \cap B) \leq P(A), P(B)$$

$$P(A \cap B) \leq 0.5$$

Mulige verdier er

$$\underline{0.2 \leq P(A \cap B) \leq 0.5}$$

Ekst $S = \{A, B, C\}$ alle delmengder er hændelser

$$P(A) = P(C) \quad P(B) = \frac{1}{2}$$

Hva er $P(A)$ og $P(C)$

$$1 = P(S) = P(\{A\}) + P(\{B\}) + P(\{C\})$$

0.5

$$1 = 0.5 + 2 \cdot P(\{A\})$$

$$\text{Så } P(\{A\}) = P(\{C\}) = \frac{0.5}{2} = \frac{1}{4} = \underline{0.25}$$

Modell: Kaster to mynter
 $S = \{MM, MK, KM, KK\}$

Hændelser: $\{MM\}, \{KK\}, \{MK, KM\}$ og union af disse samt \emptyset

$$P\{MM\} = \frac{1}{4} = P\{KK\}$$

$$P\{MK, KM\} = \frac{1}{2}$$

Alternativ modell er gitt ovenfor

$\{MM, MK, KM, KK\} \longrightarrow \{A, B, C\}$

Eks.

Kaster 2 terninger

$$T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$S = T \times T$$

elementene i S er $(2, 4)$, $(1, 5)$... etc.Det er $6 \cdot 6 = 36$ elementer i S .

Alle hendelsene har samme sannsynlighet:

$$P(\{(i, j)\}) = \frac{1}{36}$$

Hendelsene er samlinger av utfall som gir samme sum av de to terningene

$$H_2 = \{(1, 1)\}$$

$$H_3 = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

$$H_4 = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

$$H_5 = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

$$H_6 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

$$H_7 = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

$$H_8 \text{ etc}$$

$$H_{12} = \{(6, 6)\}.$$

 H_2, \dots, H_{12} er parvis disjunkte.Hendelsene er unioner av disse samt \emptyset

$$P(H_2) = \frac{1}{36} = P(H_{12})$$

$$P(H_3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = P(H_{11})$$

$$P(H_4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = P(H_{10})$$

$$P(H_5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = P(H_9)$$

$$P(H_6) = \frac{5}{36} = P(H_8)$$

$$P(H_7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Hva er sannsynligheten for \geq for minst 10?

$$H_{\geq 10} = H_{10} \cup H_{11} \cup H_{12} \text{ disjunkt union}$$

$$P(H_{\geq 10}) = P(H_{10}) + P(H_{11}) + P(H_{12}) = \frac{3+2+1}{36} = \frac{1}{6}$$

dette er det samme som $P(H_7)$.

Oppg. 30 elever i en klasse.

Hva er sannsynligheten for at minst to av elevene har bursdag samme dag?