Separable diff likninger

er diff. likningen på formen

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

Løsningsmetode

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

$$\underset{\text{(bare } y)}{g(y)\,dy} = \underset{\text{(bare } x)}{f(x)\,dx}$$

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$$

gir løsningene (implisitt)

Eksempler

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{x}{y}$$

$$\int y\,dy = \int -x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + k$$

$y^2 + x^2 = 2k$ Sirkel med radius $\sqrt{2k}$ $k>0$.

Opps. Løs diff. likningen $\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x}{y}$

$$\int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} + k_1 = \frac{x^2}{2} + k_2$$

$$y^2 - x^2 = k \ (= 2k_2 - 2k_1).$$

hyperbel.

Eks $y' = r\frac{y}{x}$ r konstant

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{r}{x}\,dx$$

$$\ln|y| = r\ln|x| + c$$

$$|y| = e^{\ln|y|} = e^{r\ln|x| + c} = e^{\ln|x|^r} \cdot e^c$$

$$|y| = e^c \cdot |x|^r$$

$y = k \cdot |x|^r$ k reelt tall.

Hvis $x>0$ $y = kx^r$ potensfunksjonen.

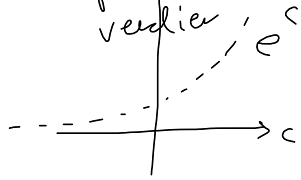
eks $y' = \frac{1}{2}y$ $y(1) = 1$ randbetingelse

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot y$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{2}\,dx$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\left(\frac{x}{2} + c\right)}$$

$$|y| = \underbrace{e^{c}}_{\text{positiv konstant}} \cdot e^{x/2}$$



$$y(x) = \underbrace{\pm e^{c}}_{\text{ikke-null}} \cdot e^{x/2}$$

identisk lik
$y(x) \equiv 0$ er også en løsning ($y' = 0 = y$ for alle x)

Så løsningene er $\underline{y(x) = k \cdot e^{x/2}}$ k reelt tall

Bestemmer k slik at randbetingelsen er oppfylt

$y(1) = k \cdot e^{1/2} = 1$ $k \cdot \sqrt{e} = 1$

$k = 1/\sqrt{e}$

Løsningen er $\underline{y(x) = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot e^{x/2}}$

Oppg. – Løs diff. likningen

$$y' + x \cdot y = 3x$$

– Finn også løsning slik at $y(1) = 2$.

$$y' = 3x - xy = x(3-y)$$ separabel diff likning

deler med $3-y$

$$\frac{1}{3-y}\frac{dy}{dx} = x$$

$$\int \frac{1}{3-y}\,dy = \int x\,dx$$

$$-\ln|3-y| = \frac{x^2}{2} + c$$

(La $u = 3-y$, $du = -dy$ $\quad \int \frac{1}{3-y}\,dy = \int \frac{1}{u}\,(-du) = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + c = -\ln|3-y| + c$)

($\exp x = e^x$)

$$\ln|3-y| = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$\exp(\ln|3-y|) = \exp\left(-\frac{x^2}{2} + c\right)$$

$$|3-y| = e^c e^{-x^2/2}$$

$$3 - y = k e^{-x^2/2} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

$$y(x) = \underline{3 - k e^{-x^2/2}}$$

Løser for randbetingelsen $y(1) = 2$

$$y(1) = 2 = 3 - k \cdot e^{-1/2}$$

$$k e^{-1/2} = 3 - 2 = 1$$

$$k = e^{1/2} = \underline{\sqrt{e}}$$

$$y(x) = \underline{\underline{3 - \sqrt{e}\, e^{-x^2/2}}}$$

Forklaring på metoden for å løse separable diff likninger.

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

La $G(y)$ være en antiderivert til $g(y)$
$F(x)$ ________ $f(x)$.

Hvis $y(x)$ er slik at $G(y(x)) = F(x) + C$,
da vil $y(x)$ oppfylle diff. likningen:

Deriver begge sider m.h.t. x

$$G'(y(x)) \cdot y'(x) = F'(x)$$

kjerneregelen

$$g(y(x)) \cdot y'(x) = f(x)$$

Så $$\underline{y'(x) = \frac{f(x)}{g(y)}}$$

Derfor er alle funksjone y slik at

$$G(y(x)) + C_1 = \int g(y)\, dy = \int f(x)\, dx = F(x) + C_2$$

løsningen til diff. likningen.