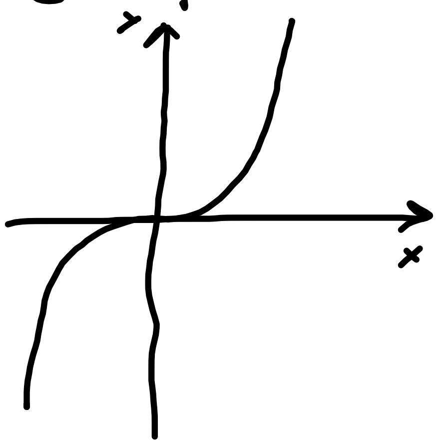
18/10.2017 Omvendte funksjoner 7.7

Eks $y = x^3$

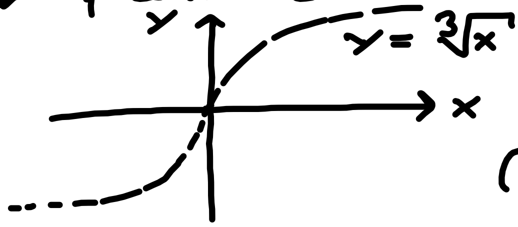


3-roten til y er x-verdien slik at $x^3 = y$.

Den skrives om

$\sqrt[3]{y}$

Det er presis én slik verdi for hver y.

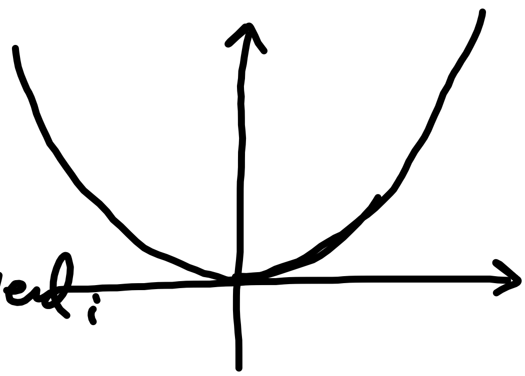


Byttet om x og y-aksene (og byttet symbolene x og y)

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x \qquad \sqrt[3]{x^3} = x$$

Kvadratrotfunksjonen:

$y = x^2$



Flere x-verdier gir samme funksjonsverdi

$(-2)^2 = 2^2 = 4.$

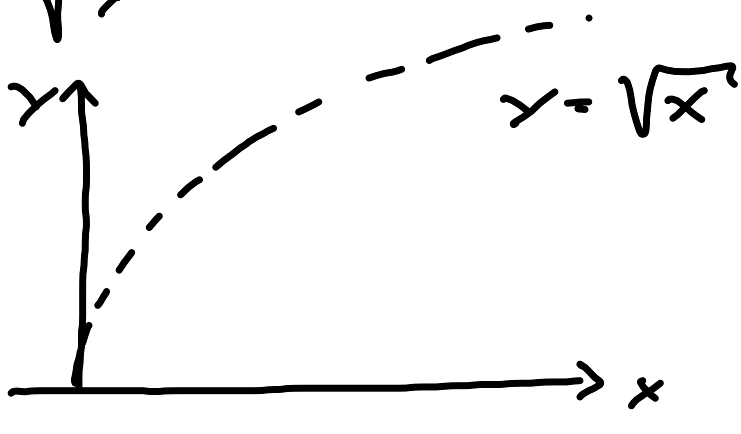
Funksjonen $y = x^2$ avgrenset til $x \geq 0$ $([0,\infty\rangle)$ har en inversfunksjon. For alle $y \geq 0$ så finnes det en entydig $x \geq 0$ s.a $x^2 = y$

inversfunksjonen til $y = x^2$ på $[0, \infty)$
er kvadratrotfunksjonen $\sqrt{y}$.

$$(\sqrt{y})^2 = y \quad \text{og} \quad \sqrt{y} \geq 0$$

for alle $y \geq 0$

$$\sqrt{y^2} = |y| \quad \text{alle } y.$$



Generelle definisjoner.

En funksjon $f(x)$, det. mengde D_f er <u>injektiv</u> (1-til-1) hvis

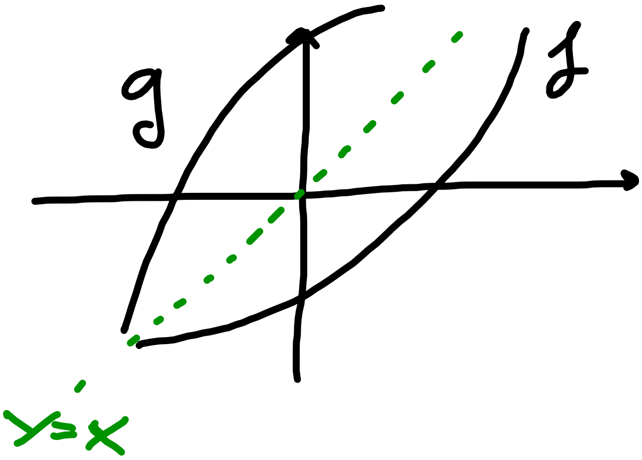
$f(x_1) = f(x_2)$ da må $x_1 = x_2$.

Inversfunksjonen g til en injektiv funksjon f er definert ved

$$g(f(x)) = x$$

$D_g = V_f = \{ f(x) \text{ for } x \in D_f \}$

$V_g = D_f$



Grafene til f og inversfunksjonen g spegler om linjen x=y

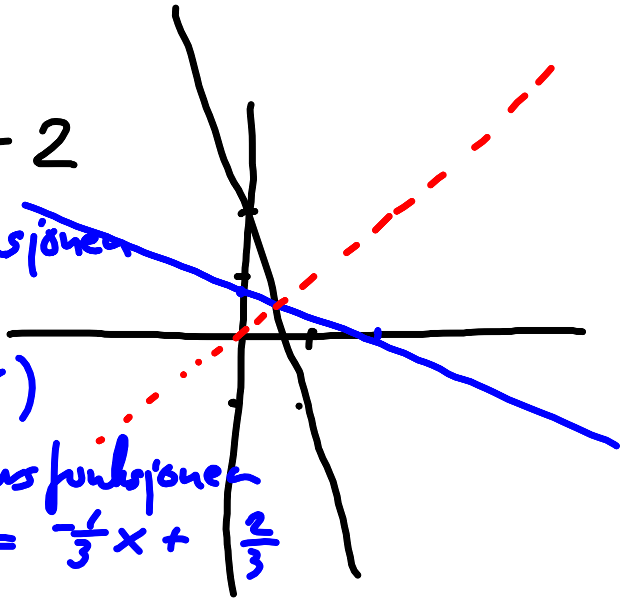
Eks $f(x) = -3x + 2$

Finner inversfunksjonen til $y = -3x+2$
(uttrykke x v.h.a y)

$y-2 = -3x$

$x = -\frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$

Inversfunksjonen
$g(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$



$f'(x) > 0$ i D_f og D_f er et intervall
da er $f(x)$ en (strengt) økende
funksjon.
En økende funksjon er injektiv
$x_1 < x_2$ da er $f(x_1) < f(x_2)$
Tilsvarend for $f'(x) < 0$ (avtagende)

<u>Eks</u> Vis at $x^2 + 2x + 3$, $x \geq 0$
har en inversfunksjon (er injektiv) $[0, \infty\rangle$
og finn inversfunksjonen.

$$\big(\underbrace{x^2+2x+3}_{f(x)}\big)' = 2x+2 = 2(x+1) \geq 2$$
$$x \geq 0$$

så $f(x)$ er økende, og derfor injektiv, i $[0, \infty\rangle$. Derfor har $f(x)$ en invers-funksjon.

$$y = x^2+2x+3$$

Ønsker å uttrykke $(x \geq 0)$ v.h.a y.

$$y = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 - 1 + 3$$

$$\left((x+1)^2 = x^2 + 2x + 1^2\right)$$

$$y = (x+1)^2 + 2$$

$(x+1)^2 = y-2$ så $x+1 = \sqrt{y-2}$ og $x+1 = -\sqrt{y-2}$

Siden $x \geq 0$

$$\underline{x = \sqrt{y-2} - 1}$$

Inversfunksjonen til f er

$$g(x) = \sqrt{x-2} - 1.$$

Alternativt : $y = x^2 + 2x + 3$

2. grads likning $x^2 + 2x + (3-y) = 0$

Setter inn i abc - formelen

$a = 1 \quad b = 2 \quad c = 3-y$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1(3-y)}\right)$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4}\sqrt{1-(3-y)}}{2}$$

$$= \frac{2}{2}\left(-1 \pm \sqrt{y-2}\right)$$

$x \geq 0$ så $\quad x = \underline{\sqrt{y-2} - 1}$

Eks. Vis at $f(x) = x^5 + x - 3$

$D_f = \mathbb{R}$ har en invers funksjon.

$f'(x) = 5x^4 + 1 \geq 1 > 0$

$f'(x) > 0$ def på intervall $\Rightarrow$ økende $\Rightarrow$ injektiv $\Rightarrow$
f har inversfunksjon.