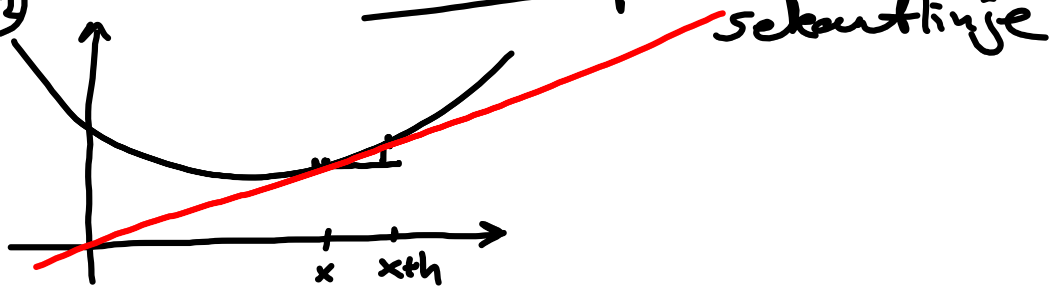
17.10.17

1

Derivasjon



Den deriverte til f i x er

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Tangentlinjen er grensen av sekantlinjene når $h \to 0$.

Den deriverte er stigningstallet til tangentlinjen.

Den deriverte trenger ikkje eksistere.

2

Den deriverte til x^r er

$r x^{r-1}$

$$\boxed{(x^r)' = r x^{r-1}}$$

r reelt tall

$$(\sqrt[3]{x})' = (x^{1/3})' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{x^{-2/3}}{3}$$

③ 7.6 Sammensatte funksjoner

f, u to funksjoner

Den sammensatte funksjon "først u så f"

$f(u(x))$ ← indre funksjon

ytre funksjon

Eks: $f(x) = x^2$ $\quad u(x) = 3 + x^5$

$$f(u(x)) = \underline{(3 + x^5)^2}$$

$$u(f(x)) = 3 + (x^2)^5 = \underline{3 + x^{10}}$$

Alternativ notasjon $f \circ u$ ← sirkel, ring

$$f \circ u(x) = f(u(x))$$

Definisjonsmengden til $f \circ u$ består av alle x i D_u slik at $u(x)$ er i D_f.

(4)

Skriv $\frac{1}{4+x}$ som en sammensatt funksjon av to enklere.

La $u(x) = 4+x$ og $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

Da er $\frac{1}{4+x} = f(u(x))$

$(2+x^3)^2 = f \circ u(x)$

$f(x) = x^2, \quad u = 2+x^3$

La $f(x) = 2x - 1$ og $g(x) = -3x$

(Lineære funksjoners grafene er linjer)

$f \circ g(x) = 2(-3x) - 1 = -6x - 1$

$g \circ f(x) = -3(2x-1) = -6x + 3$

5 sammensetningene er lineære funksjoner

stigningstallet til de sammensatte funksjon (linjene de beskriver ...) er produktet av stigningstallet til linjene beskrevet av f og g.

6

Kjerneregelen

$$(f\circ u)'(x) = f'(u(x))\cdot u'(x)$$

Eks $\left(\frac{1}{4+x}\right)' = \left(f\circ u(x)\right)'$

$f(u) = u^{-1}$ $\quad u(x) = 4+x$

$$= f'(u(x))\cdot u'(x)$$

$$-1(u(x))^{-2}\cdot(4+x)' = \underline{\frac{-1}{(4+x)^2}}$$

$$\left((2+x^3)^2\right)' = 2(2+x^3)\cdot(2+x^3)'$$

$$= 2(2+x^3)\cdot 3x^2 = \underline{6x^2(2+x^3)}$$

Deriver $(4+3x)^7 = f \circ u(x)$

7

ytre funksjon $f(x) = x^7$

indre funksjon (kjerne) $u(x) = 4+3x$

$$\left((4+3x)^7\right)' = (f \circ u)' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$

$$= 7(u(x))^6 \cdot (4+3x)'$$

$$= 7(4+3x)^6 \cdot 3 = \underline{21(4+3x)^6}$$

Deriver $\sqrt{2-x^5} = f \circ u(x)$

$f(u) = u^{1/2} = \sqrt{u}$

8

$u(x) = 2 - x^5$

$f'(u) = (u^{1/2})' = \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} u^{-1/2} = \frac{1}{2u^{1/2}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{u}}$

$u'(x) = -5x^4$

$(\sqrt{2-x^5})' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$

$= \frac{1}{2\sqrt{2-x^5}} \cdot (-5x^4) = \frac{-5x^4}{2\sqrt{2-x^5}}$

sammensetning med tre funksjoner

$(f(g(u(x))))' = f'(g(u(x))) \cdot g'(u(x)) \cdot u'(x)$

Deriver $\sqrt{4-\sqrt{2-x^5}}$

$$\left(\sqrt{4-\sqrt{2-x^5}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{4-\sqrt{2-x^5}}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{2-x^5}} \cdot (-5x^4)$$

9

Eks $x^{m\cdot n} = (x^m)^n$

Vi vet at $(x^{m\cdot n})' = m\cdot n\, x^{m\cdot n-1}$

Ved bruk at kjerneregelen:

$$((x^m)^n)' = n(x^m)^{n-1} \cdot (x^m)'$$

$$= n x^{m\cdot n-m} \cdot m x^{m-1}$$

$$= m\cdot n\, x^{m\cdot n-m+m-1} = \underline{m\cdot n\, x^{m\cdot n-1}}$$

Linear kjerne

$$\left(f(ax+b)\right)' = a f'(ax+b)$$

10

(den deriverte av kjernen $ax+b$)

Leibniz notasjonen for den deriverte

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$$

Kjerneregelen

$$\frac{d f(u(x))}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\left(1+x^{3/2}\right)^{7.2} = f \circ u\,(x)$$

11

$$f(u) = u^{7.2}$$

$$u(x) = 1 + x^{3/2}$$

$$f'(u) = 7.2\,u^{6.2} \qquad u' = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$\frac{d}{dx} f \circ u = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \underline{7.2\left(1+x^{3/2}\right)^{6.2} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2}}$$