Innlevering	FO929A - Matematikk forkurs HIOA Obligatorisk innlevering 3
Innleveringsfrist	Fredag 14. november 2014 kl. 14
Antall oppgaver:	13

1

Finn volumet til tetraederet med hjørner $\mathcal{O}(0,0,0)$, $P(1,-3,5)$, $Q(2,0,6)$ og $R(4,24,-2)$.

2

a) Finn en likning som beskriver (har løsning som er) planet vinkelrett på vektoren $[-2,0,5]$ og som inneholder punktet P med koordinater $(-2,4,1)$.

b) Finn en likning som beskriver planet som inneholder punktet $(1.381, 5.834, 39.110)$ og som er vinkelrett på vektoren $\overrightarrow{u} = [0.735, -2.879, 0.088]$.

3

a) Finn en parametrisering av planet som inneholder de tre punktene A, B og C med koordinater henholdsvis $(1,0,0)$, $(0,3,2)$ og $(1,3,-3)$.

b) Finn en likning for planet i a)

4

Finn alle plan som er utspent av vektorene $\overrightarrow{a} = [1,2,-3]$ og $\overrightarrow{b} = [-2,-4,-6]$. og som har korteste avstand til origo lik 5. Planene skal beskrives ved en likning.

5

Et regulært tetraeder er et tetraeder som består av fire sider som er likesidede trekanter. La lengden på sidekantene i de likesida trekantene være L.

a) Vi kan starte med å se på en likesida trekant ABC i xy-planet. La A være origo og la B ha koordinater $(L,0,0)$. Anta at det tredje hjørnet har positiv y-koordinat. Finn koordinaten til punktet C.

b) La punkte E ligge midt i trekanten ABC. Det vil si at avstanden fra punktet E til de tre hjørnene A, B og C skal være like. Finn denne avstanden og finn koordinaten til punktet E.

c) Vi legger nå til et fjerde punkt D med positiv z-koordinat slik at A, B, C, og D er hjørnene i et regulært tetraeder. Finn koordinaten til punktet D, og finn avstanden fra D til trekanten ABC i xy-planet ("høyden"). Finn vinkelen mellom linjen AD og den positive z-aksen

d) Finn volumet og overflatearealet til tetraederet.

6

To plan i rommet er gitt ved $2x - y + 3z = 12$ og ved $x + 5y - 2z = -3$. De to planene snitter i en linje. Det vil si at punktene de har til felles er en linje. Parametriser denne linjen. (Hint: Se notater fra forkurs mattematikk 3.11.2011.)

7

Vinkelen mellom to plan er vinkelen mellom linjer som står vinkelrett på planene (det er en vinkel mellom 0 og 90 grader). Bestem vinkelen mellom de to planene i forrige oppgave.

8

Gi en parametrisering av planet gitt ved likningen

$$x - 2y + 3z = 4.$$

9

Dette er en teorioppgave som omhandler dekomponering av vektorer.

La $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to vektorer og anta at $\vec{b} \neq \vec{0}$. Da er $\vec{a}$ en sum av en vektor $\vec{a}_{\parallel}$ parallell til $\vec{b}$ og en vektor $\vec{a}_{\perp}$ vinkelrett på $\vec{b}$. Denne dekomponeringen er entydig (det vil si at det finnes bare en slik dekomponering).

Vis at dekomponeringen er entydig og at den er gitt ved

$$\vec{a}_{\parallel} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} \text{ og } \vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel}. \tag{1}$$

(Hint: Vis at $\vec{a}_{\perp}$ er vinkelrett på $\vec{a}$.)

Her er et bevis for at skalarproduktet er lineært med hensyn til addisjon. (Dere trenger ikke gjøre noe.) Fra entydighet av dekomponeringen er

$$(\vec{a} + \vec{c})_{\parallel} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{c}_{\parallel}$$

siden $\vec{a}_{\parallel} + \vec{c}_{\parallel}$ er parallell til $\vec{b}$, $\vec{a}_{\perp} + \vec{c}_{\perp}$ er vinkelrett på $\vec{b}$ og summen er $\vec{a} + \vec{c}$. Dette sammen med den eksplisitte dekomponeringen i Likning 1 viser at skalarproduktet er lineært $(\vec{a} + \vec{c}) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{c} \bullet \vec{b}$.

10

(Se foregående oppgave.) Dekomponer vektoren $\vec{a} = [-2, 1, 5]$ som en sum av en vektor parallell til $\vec{b} = [1, 0, 7]$ og en vektor som er vinkelrett på $\vec{b}$.

11

a) Finn summen av alle naturlige tall mindre enn eller lik 1000.

b) Finn summen av alle positive partall (dvs. tall som er delelige med 2) mindre enn eller lik 1000.

c) Finn summen av alle naturlige tall som er delelige med 5 og mindre enn eller lik 1000.

d) Finn summen av alle naturlige tall som er delelige med 2 eller 5 (eller begge) og mindre enn eller lik 1000.

12

Den 1. januar 2001 setter Josef inn 1000 kroner på en fastrentekonto med 0.05% årlige renter. Han fortsetter å sette inn 1000 kr 1. januar hvert år frem til og med 1. januar 2010. Hvor mye penger vil det være på kontoen ved utgangen av 2012?

13

Vis at summen av alle tall på formen

$$2^n 3^m,$$

hvor $0 \leq n \leq 11$ og $0 \leq m \leq 5$, er lik 1 490 580. (Det er $12 \cdot 6 = 72$ slike tall.)