

12.nov 2014

Eksempel (hjort til oblig 3 oppg. 12)

- ① Årlig spareplan (BSU) : Det settes inn
25000 kr 1.januar fra og med 2010 til og med 2014.
Renten er 4%.

Hvor mye penger er det på kontoen ved utgangen av 2014?

Vekstfaktoren (årlig) er $r = 1 + 4\% = 1.04$.

Nåverdien av $P_0 = 25000$ kr satt inn:

$$1.\text{jan} \quad 2014 \quad \text{er} \quad P_0 \cdot r$$

$$2.\text{jan} \quad 2013 \quad \text{er} \quad P_0 \cdot r^2$$

$$- \quad 2012 \quad - \quad P_0 \cdot r^3$$

$$- \quad 2011 \quad - \quad P_0 \cdot r^4$$

$$- \quad 2010 \quad - \quad P_0 \cdot r^5$$

Pengene på kontoen ved utgangen av 2014 er

$$P_0(r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5) = P_0 \cdot r(1 + r + r^2 + r^3 + r^4)$$

geometrisk rekke.

$$= P_0 \cdot r \frac{r^5 - 1}{r - 1}$$

$$= 25000 \text{ kr } \underbrace{(1.04)}_{5.633} \underbrace{\frac{(1.04)^5 - 1}{0.04}}_{140824} \text{ kr}$$

Vendelige rekker

a_1, a_2, a_3, \dots følge

tilordnet vendelig rekke $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

Eks $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ $a_n = n$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ $(a_n = \frac{1}{n})$

harmoniske rekke

Begge disse divergerer (har ingen sum)

Den geometriske rekken $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

konvergerer til 2 $a_n = \frac{1}{2^n} n \geq 0$

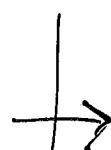
(summen er like 2).

Summen av $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ kallas

n-te delsum (og skrivs gjerne S_n) av
rekken $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

Følger

$\{a_n\}$ a_1, a_2, \dots



Rekker

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$

Følge av delsummer

$\{S_n\}$ $S_n = a_1 + \dots + a_n$



$a_1 + a_2 + \dots$

En velle $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ konvergerer til a (summen til vellen) hvis følgen av delsummer konvergerer til a .

Dette mye lettet å avgjøre konvergens enn å finne summen (hvis den konvergerer).

Eksempel $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2$
 $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Delsum $S_n = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{n \text{ ledd.}} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}$
 $(1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 2)$

$$S_n = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Følgen av delsummer $\{ 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \}$ konvergerer til 2.

Generelt $1 + x + x^2 + \dots$
 $(a_n = x^n \quad n \geq 0)$ $= \begin{cases} \frac{1}{1-x} & |x| < 1 \\ \text{divergen} & |x| \geq 1. \end{cases}$

$$1 + 0.99 + 0.99^2 + \dots \quad 0.99^{n-1} = \frac{(0.99)^n - 1}{0.99 - 1} = -100(0.99^n - 1)$$

Grensen av n -te delsum når $n \rightarrow \infty$ er lik 100

$$1 + 0.99 + 0.99^2 + \dots = 100$$

Beweis for at den harmoniske rekker.

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ divergerer.

$$\underbrace{\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^n+2^n}}_{2^n \text{ ledd.}}$$

$$\frac{1}{2^n+2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} \leq \text{leddene} \leq \frac{1}{2^n+1}$$

Det er 2^n ledd, derfor

$$\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2^n+1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{2^n}{2^n+1} < 1$$

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} \right) + \dots$$

delsum

$$\underline{\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot n \leq S_{2^{n+1}} \leq \frac{3}{2} + n}$$

Så følger av delsummer konvergerer ikke.

Den harmoniske rekker divergerer.

$$\text{Når } n=9 \text{ så er } 2^{n+1} = 2^{10} = 1024$$

Estimatene gir :

$$6 \leq S_{1024} \leq 10.5$$

Mer presist er $S_{1024} \approx 7.50917567\dots$