12. nov 2014

Eksempel (hint til oblig 3 oppg. 12)

(1) Årlig spareplan (BSU): Det settes inn

25000 kr 1. januar fra og med 2010 til og med 2014.

Renten er 4%.

Hvor mye penger er det på kontoen ved utgangen av 2014?

Vekstfaktoren (årlig) er $r = 1 + 4\% = 1{,}04$.

Nåverdien av $P_0 = 25000$ kr satt inn:

1. jan	2014	er	$P_0 \cdot r$
1. jan	2013	er	$P_0 \cdot r^2$
–	2012	–	$P_0 \cdot r^3$
–	2011	–	$P_0 \, r^4$
–	2010	–	$P_0 \, r^5$

Pengene på kontoen ved utgangen av 2014 er

$$P_0 (r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5) = P_0 \cdot r \underbrace{(1 + r + r^2 + r^3 + r^4)}_{\text{geometrisk rekke.}}$$

$$= P_0 \cdot r \, \frac{r^5 - 1}{r - 1}$$

$$= 25000 \text{ kr} \underbrace{(1.04) \frac{(1.04)^5 - 1}{0.04}}_{5.633} = \underline{\underline{140\,824 \text{ kr}}}$$

Vendelige rekker

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ følge

tilordnet vendelig rekke $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

Eks $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$ $a_n = n$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ $(a_n = \frac{1}{n})$

harmoniske rekke

Begge disse divergerer (har ingen sum)

Den geometrisk rekken $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$

konvergerer til 2 $a_n = \frac{1}{2^n}$ $n \geq 0$

(Summen er lik 2).

Summen av $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ kalles

n-te delsum (og skrivs gjerne S_n) av

rekken $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

Følger	Rekker
$\{a_n\}$ $a_1, a_2, \ldots$ $\rightarrow$	$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$
Følge av delsummer $\leftarrow$	$a_1 + a_2 + \cdots$
$\{S_n\}$ $S_n = a_1 + \cdots + a_n$	

En rekke $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ konvergerer til a (summen til rekken) hvis følgen av delsummer konvergerer til a.

Det er mye lettere å avgjøre konvergens enn å finne summen (hvis den konvergerer).

Eksempel $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 2$

$$a_n = \frac{1}{2^n}.$$

Delsum $S_n = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{n \text{ ledd.}} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}$

$$\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2\right)$$

$$S_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \underline{2 - \frac{1}{2^{n-1}}}$$

Følgen av delsummer $\left\{2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right\}$ konvergerer til 2.

Generelt $1 + x + x^2 + \cdots \quad (a_n = x^n \quad n \geq 0) \quad = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & |x| < 1 \\ \text{divergerer} & |x| \geq 1. \end{cases}$

$$1 + 0.99 + 0.99^2 + \cdots \ 0.99^{n-1} = \frac{(0.99)^n - 1}{0.99 - 1} = -100(0.99^n - 1)$$

Grensen av n-te delsum når $n \to \infty$ er lik 100

$$1 + 0.99 + 0.99^2 + \cdots = 100$$

Bevis for at den harmoniske rekken

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ divergerer.

$$\underbrace{\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n}}_{2^n \text{ ledd.}}$$

$$\frac{1}{2^n+2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} \leq \text{leddene} \leq \frac{1}{2^n+1}$$

Det er 2^n ledd, derfor

$$\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{2^n}{2^n+1} < 1$$

$$1 + \frac{1}{2} + \overset{n=1}{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)} + \overset{n=2}{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)} + \overset{n=3}{\left(\frac{1}{9} + \cdots \frac{1}{16}\right)} + \cdots$$

delsum

$$\underline{\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot n \leq S_{2^{n+1}}} \leq \frac{3}{2} + n$$

Så følgen av delsummer konvergerer ikke.

Den harmoniske rekken divergerer.

Når $n = 9$ så er $2^{n+1} = 2^{10} = 1024$

Estimatene gir:

$$6 \leq S_{1024} \leq 10.5$$

Mer presist er $S_{1024} \approx 7.50917567\ldots$