7 mars 2013

Hvorfor er en oktav delt i 12 toner?

ν frekvens. ν_1, ν_2 to frekvenser

(A : 440 Hz.)

$\frac{\nu_2}{\nu_1} = 2$ forholdet er en oktav

Kvint : $\frac{\nu_2}{\nu_1}$: $\frac{3}{2} = 1.5$ (Piano : C, G)

Kvart : $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{4}{3} = 1.333\ldots$ (— C, F)

ters : $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{5}{4} = 1.25$ (— C, E

Deler en oktav i n deler slik at etterfølgende halvtoner har samme forhold, k (Kromatisk skala)

$$\nu_0, k\nu_0, k^2\nu_0, \ldots, k^n\nu_0 = 2\nu_0$$

$$k^n = 2$$

$$k = \sqrt[n]{2}$$

Vi ser at n gir svært gode tilnærminger til forholdet kvint og kvart :

$$\left(\sqrt[12]{2}\right)^5 = 1.3348\ldots$$

$$\left(\sqrt[12]{2}\right)^7 = 1.4983\ldots$$

(ters : $\left(\sqrt[12]{2}\right)^4 = 2^{4/12} = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2} = 1.2599\ldots$)

Logaritmisk skala

Bel enhet til $\text{Log} \frac{E_2}{E_1}$ E_1, E_2 effekter

desiBel $= \frac{1}{10}$ Bel (desiLiter $= \frac{1}{10}$ Liter)

desibel : $10 \text{ Log}(E_2/E_1)$.

Lyd : Effekt / m^2 proporsjonalt til P^2
P lydtrykk.

Referanse lyd $P_0 = 20 \mu$ Pascal (μ mikro $= 10^{-6}$)
(svakeste hørbar lyd ved 1kHz)

Lydstyrke : $10 \text{ Log}(P^2/P_0^2)$ dBel

$= 10 \text{ Log } (P/P_0)^2$ dBel

$= 20 \text{ Log } (P/P_0)$ dBel.

En dobling av lydtrykket gir en økning

på $20 \text{ Log } 2$ dBel $\sim (6.0206\ldots)$ dBel

$\sim$ 6 dBel.

Menneskenes hørsel fungere fra 0 dBel → 120 dBel

Området svarer til 20 steg av 6 dBel.

$$\frac{P}{P_0} = 2^{20} = (2^{10})^2 = (1024)^2 \approx 10^6$$

Forholdet mellom lydtrykket til en sterk og en veldig svak lyd er $\approx 10^6$!

Renter

$1\% = \frac{1}{100}$

Årlig rente (pro anno, p.a) r_{pa}

Pengemengde P_0

Etter 1 år : $P_0 + r_{pa}P_0 = P_0(1 + r_{pa})$

$r_{pa} = 0.05 = 5\%$

Etter m år : $\underline{P_0(1+r_{pa})^m}$

Momentan rente (kontinuerlig)

$P'(t) = rP(t) \quad P(0) = P_0$

$\underline{P(t) = P_0 e^{rt}}$ (t målt i år)

r rentesats.

$$\left((P_0 e^{rt})' = P_0 (e^{rt})' = P_0 e^{rt}(rt)' = r(P_0 e^{rt}) = r \cdot P(t) \right)$$

$r = 12\%$ $\quad r_{p.a} = 12\%$ $\quad P_0 = \underline{100\text{kr}}$

1 år: $P_{p.a}(1) = \underline{112\text{ kr}}$ $\quad P(1) = 100e^{0.12 \cdot 1} = \underline{112{,}75\text{kr}}$

5 år: $P_{p.a}(5) = 100\text{kr} \cdot (1+0{,}12)^5 = \underline{176.2\text{ kr}}$ $\quad P(5) = \underline{182.2\text{ kr}}$

10 år : $P_{p.a}(10) = \underline{310.6\text{ kr}}$ $\quad P(10) = \underline{332}$ kr

Utlånsrente er 5%

Setter inn 100 kr

Tar ut pengene etter ½ år.

Hvor mye penger har vi da?

$$100\text{kr}\,(1.05)^{1/2} = \underline{102{,}47\text{kr}}$$

Hvilke rente r gir samme avkastning som en årlig rente r_{pa}?

$$P_0 e^r = P_0(1 + r_{pa})$$

$$\underline{e^r = 1 + r_{pa}}$$

Så $\underline{r = \ln(1 + r_{pa})}$

eks $r_{p.a} = 10\%$ $\qquad r = \ln(1.1) = 0.0953 = \underline{9.53\%}$

Del året i n deler (like lange)

$\frac{r}{n}$ være renten for hver del.

(ved utgang av 3 tidsenhet: $P_0(1+\frac{r}{n})^3$)

Etter 1 år: $P_0(1 + \frac{r}{n})^n$.

Grensen $\lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n/r}\right)^r$

$$= \Big(\underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{r}{n}\right)^{n/r}}_{(\;e\;)^r}\Big)^r = e^r$$

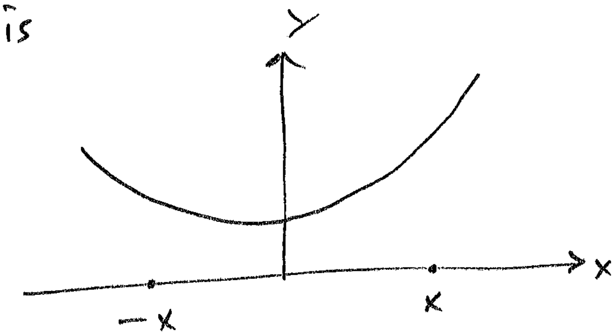
jevne og odde funksjoner

$f(x)$ definert $(-a, a)$.
(eller et område hvor x er med hvis $-x$ er med)

$f(x)$ er en jevn funksjon hvis

$$f(x) = f(-x) \quad \text{alle } x$$

"f er symmetrisk om y-aksen"

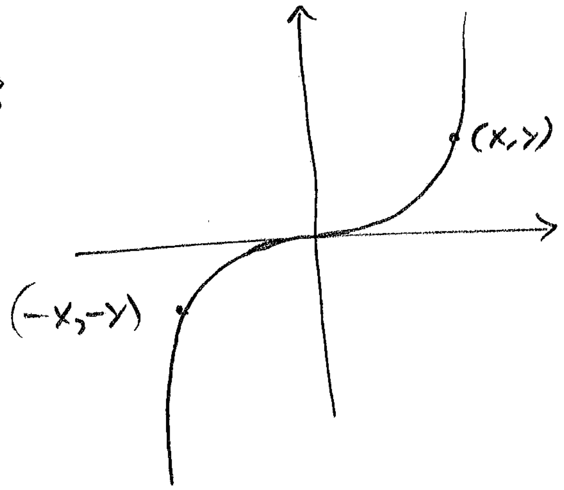


eks: $\cos x$, x^n n jevn tall

$f(x)$ er en odde funksjon hvis

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{alle } x$$

"f er symmetrisk om origo."



eks: $\sin x$, x^n n oddetall.
$\tan x$

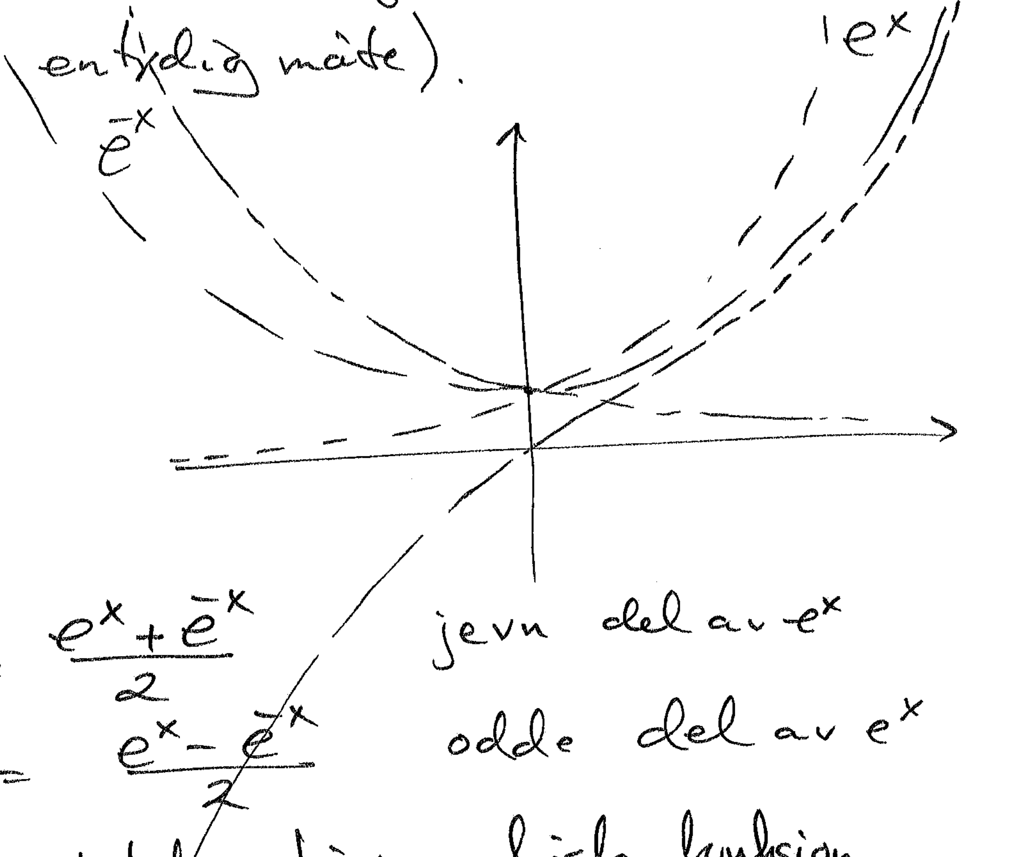
$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ ikke odde eller jevn funksjon

$f(-x) = 1 - x + x^2 - x^3$

$$f(x) = \underbrace{(1 + x^2)}_{\text{jevn}} + \underbrace{(x + x^3)}_{\text{odde}}$$

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{jevn}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{odde}}$$

Alle funksjon (med symmetrisk def. område) er en sum av en jevn og en odde funksjon (på en entydig måte).



$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{jevn del av } e^x$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{odde del av } e^x$$

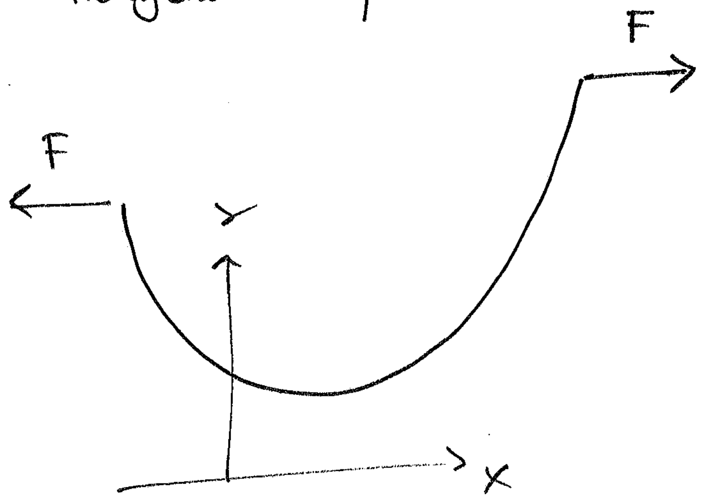
Hyperbolske trigonometriske funksjon

$$(\cosh x)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \underline{\sinh x}$$

$$(\sinh x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \cosh(x)$$

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$$

Hengende kjede



Kjede med massetetthet ρ
gravitasjonskonstant g

Kjedet er beskrevet av

$$y(x) = \frac{1}{a}\cosh(ax+b) + c$$

$$a = \frac{\rho \cdot g}{F}.$$

En utledning er skrevet opp i notatene fra 2012.
se notater "odde og jevne funksjoner".