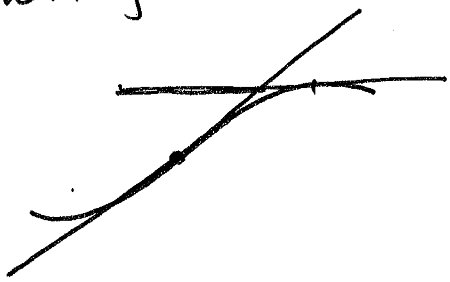
(1) 24/jan 2013

En vendetangent er en tangentlinje i et vendepunkt



Eksempel

$f(x) = \sqrt{x} + x^2$ Definisjonsmengde $x \geq 0$

Finn vendetangentene til $f(x)$.

$f'(x) = (x^{1/2})' + (x^2)' = \frac{1}{2} x^{-1/2} + 2x$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x$ $x > 0$

($f(x)$ er ikke deriverbar i $x=0$)

$f''(x) = \left(\frac{1}{2} x^{-1/2} + 2x\right)' = \frac{1}{2}(x^{-1/2})' + 2(x)'$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) x^{-3/2} + 2 \cdot 1$

$f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-3/2} + 2 = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}} + 2$

$f''(x) = 0$ $\frac{-1}{4\sqrt{x^3}} = -2$

$\sqrt{x^3} = \frac{1}{8}$ $\left(\sqrt{x^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right.$

$x = \frac{1}{4}$ $x^3 = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^2$

$= \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3$

$\left. x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right)$

$f''(x)$ skifter fortegn i $x = \frac{1}{4}$.

Så $f(x)$ skifter konkavitet i $x = \frac{1}{4}$.

$\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ er et vendepunkt.

② $f\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1\cdot 8}{2\cdot 8} + \frac{1}{16} = \frac{8}{16} + \frac{1}{16}$
$= \frac{9}{16}$

$f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{1/4}} + 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)$
$= \frac{1}{2(\cdot 1/2)} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Vendetangenten går gjennom vendepunktet $\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{16}\right)$ og har stigningstall 3/2.

Vendetangenten ergitt ved

$$y - \frac{9}{16} = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{4}\right)$$
$$y = \frac{3}{2}x - \frac{3\cdot 2}{8\cdot 2} + \frac{9}{16}$$
$$\underline{\underline{y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{16}}}$$

Høyere ordens deriverte.

$f^{(n)}(x)$ n-te deriverte til $f(x)$
(resultatet av å derivere $f(x)$ n ganger)

$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$
$f^{(2)}(x) = f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$

ex
$f(x) = 2x^3 - 3x - 1$
$f'(x) = 2(x^3)' - 3(x)' + (-1)' = 6x^2 - 3$
$f''(x) = 12x$
$f'''(x) = f^{(3)}(x) = 12$, $f^{(4)}(x) = 0$, ($f^{(n)}(x) = 0$ $n \geq 4$)

3) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ $D_f = \mathbb{R}$

$f' = \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3}$ ikke deriverbar i $x=0$

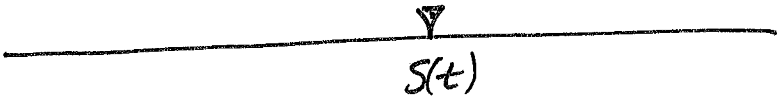
$f'' = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) x^{-5/3}$

$= \frac{-2}{9} x^{-5/3}$

f'' er ikke definert i $x=0$

(men f'' er definert i hele def. mengden til $f'(x)$)

(4) Fart og akselerasjon



$S(t)$ posisjon, ved tiden t, langs en rett strekning.

$$\frac{d}{dt} S(t) = S'(t) = \dot{S}(t) = V(t)$$ (momentan) fart i tiden t.

$$\frac{d^2}{dt^2} S(t) = \frac{d}{d} V(t) = \ddot{S}(t) = S''(t) = V'(t)$$
$$= a(t)$$ akselerasjon ved tiden t.

$$S'''(t) = \frac{d^3 s}{dt^3} = S^{(3)}(t) \quad ?$$ Ikke vanlig å gi fysisk fortolkning.

<u>Eks</u> Bevegelseslikningen

$$S(t) = \frac{1}{2} a t^2 + V_0 t + S_0 \quad , \quad S(0) = S_0$$

$$V(t) = S'(t) = \frac{1}{2} a (t^2)' + V_0 (t)' + (S_0)'$$

$$V(t) = a \cdot t + V_0 \qquad V(0) = V_0$$

$$a(t) = a(t) + V_0 = a.$$

konstant akselerasjon.

5

Optimaliseringsproblem

Finn største / minste verdier til en funksjon (gitt noen begrensninger)

Gitt at $x+y=1$. Hva må x og y være for at produktet $x \cdot y$ er størst mulig?

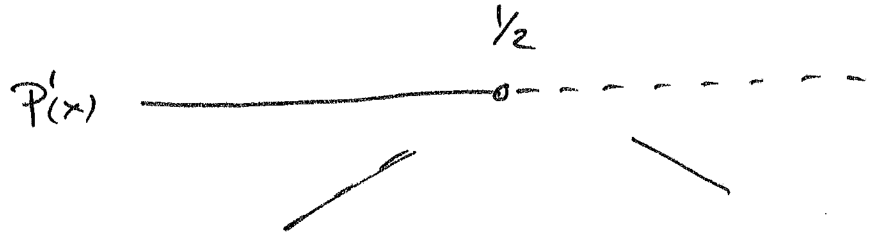
$y = 1-x$

Produktet $P(x) = x \cdot y = x(1-x)$

$$P'(x) = (x-x^2)' = (x)' - (x^2)'$$
$$= 1-2x$$

$P'(x) = 0$ når $2x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ (og da er $y = \frac{1}{2}$)

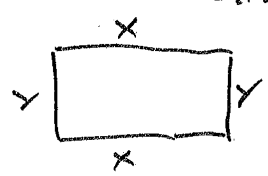
$x = \frac{1}{2}$ er det eneste kritiske punktet.



Så $P(x)$ har et globalt toppunkt: $x = \frac{1}{2}$.

Så $x \cdot y$ er størst under betingelsen $x+y=1$ når $x = \frac{1}{2} = y$ og da er produktet $1/4$.

Gitt 40 meter med gjerde.



Hvor stor innhegning kan vi lage? (gitt at den skal være rektangulær)

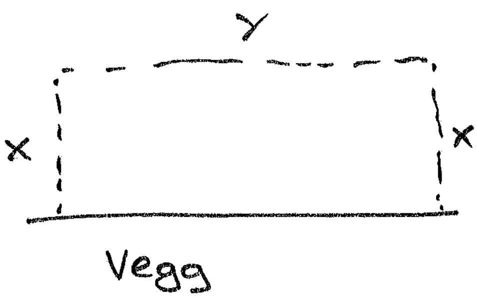
(6) Lengden av gjerde : $2x + 2y = 40\,m$.

Arealet : $x \cdot y = \left(\frac{2x \cdot 2y}{4}\right)$ er størst

mulig når $2x = 2y = 20\,m$.

$x = y = 10\,m$. (D.v.s. kvadratisk)

Arealet er da $A = (10\,m)^2 = \underline{\underline{100\,m^2}}$



Lengden på gjerdet tilgjengelig er 40 m.
Hva er dimensjonene på den største rektangulære innhegningen vi kan lage når ene siden er en vegg?

Lengden på gjerde : $2x + y = 40\,m$

Arealet : $x \cdot y$

$y = (40\,m - 2x)$, $A(x) = x(40\,m - 2x)$

$= (40\,m) \cdot x - 2x^2$

$A'(x) = 40\,m - 4x$.

$A'(x) = 0$ når $x = 10\,m$.

$y = 20\,m$

Arealet er da $\underline{\underline{200\,m^2}}$

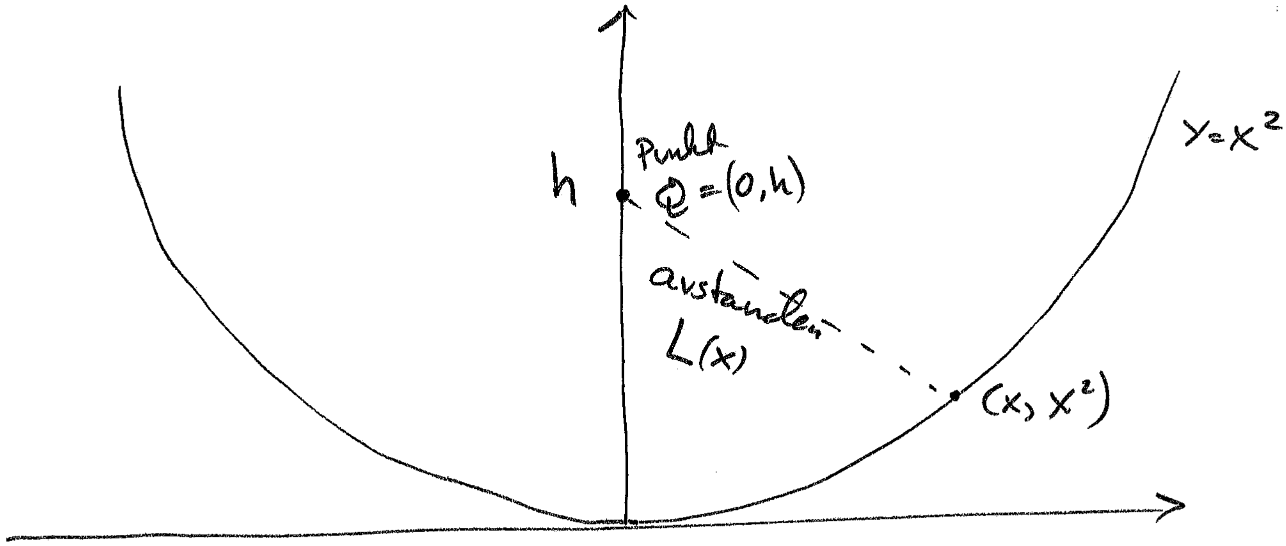
(Alternativt : $(2x) + (y) = 40$

$A = x \cdot y = \frac{(2x)\cdot(y)}{2}$

$a \cdot b$ gitt $a + b = 40$ er størst når $a = b = \frac{40}{2} = 20$.

$2x = 20$, $y = 20$)

7



Finn punkt på grafen til $y = x^2$ som er nærmest Q.

$$L(x) = \sqrt{x^2 + (h - x^2)^2}$$

Problemet er nå å finne globale bunnpunkt til $L(x)$.

$L(x)$ er minst når $(L(x))^2$ er minst.

Det er derfor tilstrekkelig å finne globale bunnpunkt for $L^2(x) = x^2 + (h - x^2)^2$.

$$= x^2 + h^2 - 2hx^2 + x^4$$

$$\frac{d}{dx} L^2(x) = (x^4 + x^2(1-2h) + h^2)'$$ ← konstant.

$$= 4x^3 + 2x(1-2h)$$

$$\frac{d}{dx} L^2(x) = 2x(2x^2 + (1-2h)).$$

Dette er 0 når $x = 0$

eller når $2x^2 = 2h - 1$

$$x^2 = h - \tfrac{1}{2}.$$

⑧ Når $\underline{h \le \frac{1}{2}}$, da gir $x=0$ eneste kritiske punkt. $L^2(x)$ avtar fram til 0 og vokser etter 0,

så $L(x)$ har globalt bunnpunkt: $x=0$. <u>Avstanden er da $|h|$</u>

Når $h > \frac{1}{2}$ har $L^2(x)$ også kritiske punkt når

$x = \sqrt{h-\frac{1}{2}}$ og $x = -\sqrt{h-\frac{1}{2}}$.

Fortegnsskjema

$$\begin{array}{cccccccc} & & -\sqrt{h-\frac{1}{2}} & & & & \sqrt{h-\frac{1}{2}} & \\ \frac{d}{dx}L^2(x) & - - - - - - & 0 & \text{————} & 0 & \cdots\cdots & 0 & \text{————————} \end{array}$$

(og derfor $L(x)$)

$L^2(x)$ har minimumspunkt for $x = \pm\sqrt{h-\frac{1}{2}}$.

$$L\left(\sqrt{h-\tfrac{1}{2}}\right) = L\left(-\sqrt{h-\tfrac{1}{2}}\right) = \sqrt{\left(h-\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{h-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}} = \underline{\sqrt{h-\tfrac{1}{4}}}$$

Når $h > \frac{1}{2}$ er punkta $\left(\sqrt{h-\frac{1}{2}}, \left(h-\frac{1}{2}\right)\right)$

og $\left(-\sqrt{h-\frac{1}{2}}, \left(h-\frac{1}{2}\right)\right)$

nærmest punktet Q.

Avstanden er da $\underline{\sqrt{h-\frac{1}{4}}}$

Alternativt kan vi bruke innsikten at $L(x)$ har en ekstremal verdi: når linja fra $(0,h)$ til (x,x^2) står vinkelrett på tangentlinjen til parabelen i punktet (x,x^2).

⑨

Stigningstall

Normal : $\frac{-1}{2x}$ $x \neq 0$

Stigningstall til linjen fra Q til punktet (x, x^2) : $\frac{x^2 - h}{x}$

Disse er like når

$$\frac{-1}{2x} = \frac{x^2 - h}{x}, \quad \text{så} \quad x^2 = h - \frac{1}{2}.$$

$x = \pm\sqrt{h - \frac{1}{2}}$ for $h \geq \frac{1}{2}$.

I tillegg er linjen fra $(0,0)$ til Q normal på tangenten. Linjen er da vertikal.

Herfra går diskusjonen som før...