Torsdag
17 jan.

Definisjon av X^r

(1) Repetisjon: $X^n = \overbrace{X \cdots X}^{n}$ n nat. tall

$x^1 = x$, $x^3 = x \cdot x \cdot x$

$$\boxed{\begin{aligned} X^n \cdot X^m &= X^{n+m} \\ (X^n)^m &= X^{n \cdot m} \end{aligned}}$$

$$\left(\begin{aligned} (x^2)^3 &= x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \\ &= (x \cdot x) \cdot (x \cdot x) \cdot (x \cdot x) \\ &= x^{2 \cdot 3} = x^6 \end{aligned} \right)$$

$x^{-1} \cdot x^1 = x^{-1+1} = x^0 = 1$

$(x^0 \cdot x = x^0 \cdot x^1 = x^{0+1} = x^1 = x$ så $x^0 = 1)$

Så $x^{-1} = \frac{1}{x}$

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ n nat tall. $x \neq 0$

Vi har nå definert x^n for n heltall.

$(x^{1/n})^n = x^{n \cdot \frac{1}{n}} = x^1 = x$

Velger $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$. $x \geq 0$

$x^{m/n} = (x^{1/n})^m = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$

$x^{k \cdot m / k \cdot n} = x^{m/n}$ $x > 0$

Dette definerer x^r for r rasjonalt tall

$x > 0$.

Ikke alle reelle tall er rasjonale tall.

$\sqrt{2}$, π. $\sqrt[3]{2}$ etc er irrasjonale tall.

2

$\sqrt{2} = 1.4142135623....$

$1.4142 = \frac{14142}{10000}$

$\sqrt{2} - 1.4142 = 0.0000135...$

Alle reelle tall kan tilnærmes så godt vi ønsker av rasjonale tall.

Grensen $\lim_{\frac{m}{n} \to \sqrt{2}} x^{m/n}$ eksisterer

og kalles $x^{\sqrt{2}}$. $x > 0$

(Det er grensen til tallfølgen

$\{x^1, x^{1.4}, x^{1.41}, x^{1.414}, ...\}$

Definisjon $x^r = \lim_{\frac{m}{n} \to r} x^{m/n}$ $x > 0$

$$\boxed{\begin{aligned} x^r \cdot x^s &= x^{r+s} \\ (x^r)^s &= x^{r \cdot s} \end{aligned}}$$

r, s reelle tall

$x > 0$

(3) Resultat

$$\boxed{\frac{d}{dx} x^r = r x^{r-1}}$$

r reelt tall, hvor x^{r-1} er definert

* $r = \frac{1}{2}$ $\quad (x^{1/2})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2}$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$x > 0$ (ikke deriverbar for $x = 0$).

* $f(x) = x^{4.2} \left(= x^{21/5} = \sqrt[5]{x^{21}} \right)$

$$f'(x) = 4.2 \cdot x^{4.2-1} = \underline{\underline{4.2 \cdot x^{3.2}}}$$

* $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}} = \frac{1}{x^{1/5}} = (x^{1/5})^{-1} = x^{-1/5}$

$$f'(x) = (x^{-1/5})' = \frac{-1}{5} \cdot x^{\frac{-1}{5}-1}$$

$$= \frac{-1}{5} x^{-6/5} = \frac{-1}{5} \cdot \frac{1}{x^{6/5}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{-1}{5\sqrt[5]{x^6}}}}$$

* $f(x) = \sqrt{\sqrt[4]{x}} = \sqrt{x^{1/4}} = (x^{1/4})^{1/2} = x^{1/8}$

$$f'(x) = (x^{1/8})' = \frac{1}{8} x^{1/8-1} = \frac{1}{8} \cdot x^{-7/8}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{8\sqrt[8]{x^7}}}}$$

* $f(x) = x^{\sqrt{2}}$

$$f'(x) = \underline{\underline{\sqrt{2}\, x^{\sqrt{2}-1}}}$$

4

9.1 Derivasjon er en lineær operasjon

$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ k reelt tall

$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$

alternativ notasjon: $\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{d}{dx}f + \frac{d}{dx}g$

$\frac{d}{dx}(k \cdot f) = k \cdot \frac{d}{dx} f$

Eks * $f(x) = 3x^2 + 2x - 8$

$f'(x) = (3x^2)' + (2x)' + (-8)'$

$= 3(x^2)' + 2 \cdot (x)' + (-8)'$

$= 3 \cdot 2x + 2 \cdot 1 + 0$

$= \underline{6x + 2}$

* $f(x) = \sqrt{2x} = (2x)^{1/2} = 2^{1/2} \cdot x^{1/2}$

$f'(x) = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{x})' = \sqrt{2}\,(\sqrt{x})' = \sqrt{2}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Så $f'(x) = \frac{1}{f(x)}$

$f(x) \cdot f'(x) = 1$

* $f(x) = 5x^4 - \frac{2}{x^3}$

$f'(x) = (5x^4)' + \left(\frac{-2}{x^3}\right)' = 5(x^4)' - 2\,(x^{-3})'$

$= 5 \cdot 4 \cdot x^{4-1} - 2(-3)\,x^{-3-1}$

$= 20x^3 + 6x^{-4} = \underline{20x^3 + \frac{6}{x^4}}$

* $f(x) = \dfrac{4+3x}{x^2} = \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{3x}{x^2} = 4 \cdot x^{-2} + 3x^{-1}$

5 $f'(x) = (4x^{-2})' + (3x^{-1})' = 4(x^{-2})' + 3(x^{-1})'$

$= 4(-2x^{-2-1}) + 3(-1 \cdot x^{-1-1})$

$= -8 \cdot x^{-3} - 3 \cdot x^{-2} = \dfrac{-8}{x^3} - \dfrac{3}{x^2}$

$= \underline{\underline{\dfrac{-8-3x}{x^3}}}$

* $f(x) = x^{\sqrt{2}} \sqrt[4]{2x^3} = x^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \overbrace{(x^3)^{1/4}}^{x^{3/4}}$

$= \sqrt[4]{2} \cdot x^{\sqrt{2} + 3/4}$

$f'(x) = \sqrt[4]{2}\left(x^{\sqrt{2}+3/4}\right)' = \underline{\underline{\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right) x^{\sqrt{2} - 1/4}}}$

Se notatene fra våren 2012 for bevis av linearitet.

6

Lineær substitusjon

a, b konstanter $\qquad U = ax+b$

Resultat: $\frac{d}{dx} f(ax+b) = a \cdot f'(ax+b)$

$$= a \cdot \frac{d f(U)}{dU}\Big|_{U=ax+b}$$

$g(x) = (3x+1)^5$ $\qquad$ vi kan gange ut og så derivere 5. grads-polynomet vi får. Tungvint

La $f(U) = U^5$, $\quad f'(U) = \frac{d f(U)}{dU} = 5U^4$

$f(3x+1) = (3x+1)^5 = g(x)$

$$\frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} f(3x+1) = 3 \cdot f'(3x+1)$$

$$= 3 \cdot 5 (3x+1)^4$$

$$= \underline{15 (3x+1)^4}$$

$U(x) = ax+b$ $\qquad$ (lineær) kjerne

$g(U)$ $\qquad$ "ytre funksjon"

$g(ax+b)$ $\qquad$ sammensatte funksjon

Eksempler: $f(x) = \sqrt{x-2}$

$\sqrt{U}$ $\qquad$ $U = x-2$

$(\sqrt{U})' = \frac{1}{2} \cdot U^{-1/2}$ $\qquad$ $U' = 1$

$$= \frac{1}{2\sqrt{U}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} \cdot 1 = \underline{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}}$$

$2x+3 = u$

* $h(x) = (2x+3)^7$

7 $h'(x) = 7(2x+3)^6 \cdot 2$

$= \underline{14(2x+3)^6}$

* $g(x) = (3x+1)^{2,7}$

$g'(x) = 2,7(3x+1)^{1.7} \cdot 3$

$= \underline{8.1\,(3x+1)^{1.7}}$

$u = 3x+1$

$u' = 3$

$f(u) = u^{2,7}$

$f'(u) = 2.7 \cdot u^{1.7}$

Bevis Anta $a \neq 0$ (opplagt når $a=0$)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a(x+h)+b) - f(ax+b)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f((ax+b)+ah) - f(ax+b)}{h} \cdot \overbrace{\frac{a}{a}}^{1}$$

$h \neq 0$ så er $a \cdot h \neq 0$ og $ah \to 0$ når $h \to 0$.

$$= \lim_{(ah)\to 0} \underbrace{\frac{f((ax+b)+ah) - f(ax+b)}{ah}}_{f'(ax+b)} \cdot a$$

$$= \underline{a \cdot f'(ax+b)}$$