17.8 Potensrekker

Uendelig geometrisk rekke

(1) $$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

når $|x| < 1$

Setter $x = -y$ $\quad x^2 = (-y)^2 \quad x^3 = (-y)^3 = -y^3$ etc

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i y^i = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - + = \frac{1}{1+y}$$

når $|y| < 1$.

Setter $x = z^2$

$$\sum_{i=0}^{\infty} z^{2i} = 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \cdots = \frac{1}{1-z^2}$$

når $|z| < 1$.

Gitt en tallfølge $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Den tilordna <u>potensrekken</u> er

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Setter vi $x = 1$ får vi rekken tilordnet tallfølgen

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

<u>Resultat</u> For en potensrekke gjelder en av følgende påstander:

1) Det finnes en $R > 0$ slik at potensrekken konvergerer for alle x hvor $|x| < R$ og divergerer når $|x| > R$.

(2) 2) Potensrekken konvergerer bare når
$x=0$ (summen er da a_0). $(R=0)$

3) Potensrekken konvergerer for alle x. $(R=\infty)$

R kalles konvergensradien til potensrekken.

Den geometriske rekken har konvergensradius lik 1.

oppgave: Finn konvergensradius og summen til potens-rekkene

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+2}} = \frac{1}{9} + \frac{x}{27} + \frac{x^2}{81} + \frac{x^3}{243} + \cdots$

b) $x + x^3/2 + x^5/4 + x^7/8 + \cdots$
$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2^n}$

c) $1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12} - + \cdots$
$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}$

---

c) $1 + (-x^3) + (-x^3)^2 + (-x^3)^3 + (-x^3)^4 + \cdots$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = \frac{1}{1-(-x^3)} = \underline{\underline{\frac{1}{1+x^3}}}$

når $|-x^3| < 1$

dette er ekvivalent til $|x| < 1$.

Rekken divergerer når $|x| > 1$
(siden $(-x^3)^n$ ikke går mot null når n øker)

Så konvergensradien er $\underline{R=1}$

Løsning b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x \cdot x^{2n}}{2^n} = x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^n$$

3

$$= x\left(1 + \left(\frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^3 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^4 + \cdots\right)$$

$$= x\left(\frac{1}{1-(x^2/2)}\right) \quad \text{når} \quad \left|\frac{x^2}{2}\right| < 1.$$

(divergerer når $|x^2/2| > 1$)

$$= \underline{\frac{2x}{2-x^2}} \quad \text{når} \quad |x| < \sqrt{2}$$

(divergerer når $|x| > \sqrt{2}$)

Konvergensradien er $\sqrt{2}$.

($|x|^2 < 2$ så $|x| < \sqrt{2}$)

Løsning a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^2 \cdot 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^2} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

$$= \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{1}{9}\left(1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1-(x/3)} \quad \text{når} \quad \left|\frac{x}{3}\right| < 1$$

divergerer når $\left|\frac{x}{3}\right| > 1$.

$$= \underline{\underline{\frac{1}{9-3x}}} \quad \text{når} \quad |x| < 3$$

Konvergensradius er 3.

④ Faktum (Matte 2000)

(x radianer)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + - \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

gyldig for alle x ($R=\infty$)

($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ "n fakultet"

$3! = 6 \; (= 1 \cdot 2 \cdot 3)$ $\quad 5! = 3! \cdot 4 \cdot 5 = 6 \cdot 20 = 120$ etc)

$$\sin 0 = 0$$

$$\sin(\pi/6) = \frac{1}{2} = 0.5 \qquad \left(\frac{\pi}{6} = 30^\circ\right)$$

De 4 første leddene i potensrekken for sin x

gir $\displaystyle\sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n \, (\pi/6)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$= 0.4\underbrace{9999999}_{7}18\ldots$$

nøyaktig!

⑤ Resultat:

$$S(n) = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} i^2 \quad \text{for } n \geq 1$$

$n = 1$ $\quad S(1) = 1$

$$S(2) = 1 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$

$$S(3) = 1 + 2^2 + 3^2 = 5 + 3^2 = 5 + 9 = 14$$

$$S(4) = S(3) + 4^2 = 14 + 16 = 30$$

$$S(5) = S(4) + 5^2 = 30 + 25 = 55 \quad \text{etc}$$

Egenskap til $S(n)$

$$\underline{S(n-1) + n^2 = S(n)}$$

$$\left(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2\right) + n^2 = S(n)$$

$$\underline{S(1) = 1}$$

La $\quad T(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$T(1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1.$$

$$T(n) - T(n-1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n-1)\,n\,(2(n-1)+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{6} n \left((n+1)(2n+1) - (n-1)(2n-1) \right)$$

$$= \frac{1}{6} n \left(2n^2 + n + 2n + 1 - (2n^2 - n - 2n + 1) \right)$$

$$= \frac{1}{6} n \left(3n - (-3n) \right) = \frac{1}{6} \cdot n \cdot 6n = n^2$$

⑥ Både $S(n) = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

og $T(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

har egenskapene:

$S(1) = 1$ og $T(1) = 1$

$S(n) = n^2 + S(n-1)$

$T(n) = n^2 + T(n-1)$.

Dette gir at $S(n)$ må være lik $T(n)$ for alle n.

$S(1) = T(1) \Rightarrow S(2) = T(2) \Rightarrow S(3) = T(3)$

$\Rightarrow$ etc

matematisk induksjon

Generelt oppsett

Sekvens av påstander

Påstand n: $S(n) = T(n)$

* Sant for $n = 1$
* Hvis påstand $n-1$ er sann så er neste påstand n også sann. $n \geq 2$

Induksjon gir at alle påstandene er sanne.