12. nov
2012

Eksempel

(1) Mina har en spareplan hvor hun setter inn 1000kr pr måned. Ho får 1% månedlige renter.

Kor mykje penger har Mina ved utløpet av tredje året (36mnd)

$P_0 = 1000$ kr $\qquad r = 1\% = 0.01$

$P_0 (1+r)^1$ siste innsatte beløpet

$P_0 (1+r)^2$

$\vdots$

$P_0 (1+r)^{36}$ første innsatte beløpet.

Mina har : $P_0 \left((1+r)^1 + (1+r)^2 + \cdots + (1+r)^{36} \right)$

Dette er en geometrisk rekke. Det er lik

$$P_0 (1+r) \big(\underbrace{1 + (1+r)^1 + \cdots + (1+r)^{35}}_{\frac{(1+r)^{36} - 1}{(1+r) - 1}} \big)$$

$$= P_0 (1+r) \cdot \frac{(1+r)^{36} - 1}{r}$$

Setter inn $P_0 = 1000$ kr $\qquad r = \frac{1}{100}$

Dette gir $\underline{43{,}5 \cdot 10^3 \text{ kr}}$

(2)

$$a_0 \left(k^m + k^{m+1} + \cdots + k^{n-1} \right)$$

$m \leq n-1$

(m kan og være negativ når $k \neq 0$)

$$= a_0 k^m \Big(\underbrace{1 + k + \cdots + k^{n-1-m}}_{\frac{k^{n-m} - 1}{k-1}} \Big)$$

$$= a_0 k^m \cdot \frac{k^{n-m} - 1}{k-1}$$

$$= a_0 \frac{k^n - k^m}{k-1}$$

③

17.7 Uendelige rekker

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ uendelig følge

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ tilordnet uendelig rekke

eks: $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$ den harmoniske rekke

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$ en geometrisk rekke

"Rekken har en sum A hvis $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ nærmer seg A når n blir stor"

(summen av) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n$ n-te delsum

Følge av delsummer $S_1, S_2, S_3, \ldots$

En rekke konvergerer hvis følgen av delsummer konvergerer.

Grensen kalles summen til rekken.

En rekke som ikke konvergerer sier vi divergerer

$b_n = 1/2^{n-1}$ $n \geq 1$

$a_n = \frac{1}{2^n}$ $n \geq 0$

Eks

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & a_2 & \\ 1 + & \frac{1}{2} + & \frac{1}{4} + & \frac{1}{8} + \cdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \end{array}$$

konvergerer og har en sum som er lik $\underline{2}$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{(\frac{1}{2})^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \underline{2\left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right)}$$

Grensen $\lim_{n \to \infty} S_n = \underline{2}$

④ Finn summen til rekkene (hvis de konvergerer)

a) $1 + 0.99 + (0.99)^2 + (0.99)^3 + \cdots$ (geometriske rekker)

b) $4^5 + 4^4 + 4^3 + \cdots$

LF: a) $S_n = 1 + (0.99) + \cdots + (0.99)^{n-1} = \dfrac{(0.99)^n - 1}{0.99 - 1}$

$$= \frac{(0.99)^n - 1}{-0.01} = 100\left(1 - (0.99)^n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 100\Big(1 - \underbrace{\lim_{n\to\infty} (0.99)^n}_{0}\Big)$$

$$= \underline{100}$$

Rekken konvergerer til $\underline{100}$

b) $4^5\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\right)$

$$S_n = 4^5\left(\frac{(1/4)^n - 1}{1/4 - 1}\right) = 4^5\,\frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{3/4}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 4^5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{4^6}{3}}}$$

Den uendelige geometriske rekken

$1 + k + k^2 + \cdots$

konverger og har sum $\dfrac{1}{1-k}$ hvis $|k| < 1$

divergerer hvis $|k| \geq 1$.

5 *Eksempel*

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots$$

Ledd $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \qquad \left(\frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} \right)$$

$$S_n = \left(1-\tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}\right)$$

$$+ \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Rekken konvergerer og har sum 1.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \qquad (*)$$

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} \qquad n \geq 2$$

$$\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots \frac{1}{n(n+1)}} \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{n+1} \leq \qquad\qquad \leq 1 + 1 + \frac{1}{n}$$

n-te delsum til * er økende og begrenset av 2

Så rekken konvergerer og summen er mindre enn eller lik 2. (og større eller lik 3/2 = 1.5)

Faktum $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} = 1.64493\ldots$

6 $\boxed{\text{Hvis } a_1+a_2+a_3+\cdots \text{ konvergerer så må } \lim_{n\to 0} a_n = 0}$

Den harmoniske rekken

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots \quad \text{divergerer.}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^n+2^n}}_{2^n \text{ ledd}}$$

leddene er $\geq \frac{1}{2^n+2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$

—— || —— $\leq \frac{1}{2^n+1} \leq \frac{1}{2^n}$

minste ledd

$$\underset{\#\text{ledd}}{2^n} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}} \leq \underset{\#\text{ledd}}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} = 1$$

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots\right)$$

$$S_{2^{n+1}} = \qquad + \left(\frac{1}{2^n+1}+\cdots \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$n\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{2} \leq S_{2^{n+1}} \leq \frac{3}{2}+n\cdot 1$$

Så $\qquad S_{2^{n+1}} \geq \frac{3}{2}+\frac{n}{2}$

Så $\lim_{n\to\infty} S_{2^n}$ eksisterer ikke