8. nov 2012

17.4 Endelige rekker

① $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ tallfølge

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ rekken tilordnet tallfølgen

summen til rekken er verdien til

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ (når den eksisterer)

Eks $1, 2, 3, 4$ følgen

$1 + 2 + 3 + 4$ rekken (tilordna følgen)

summen til rekken er 10.

Notasjon Rekken $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

skrives ofte som $\sum_{i=1}^{n} a_i$

(Σ stor sigma)

$\left(\sum_{i=1}^{3} a_{i+2}\right) = a_3 + a_4 + a_5 = \sum_{i=3}^{5} a_i$

$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2m} = \sum_{i=1}^{m} a_{(2i)}$

Skriv opp rekken $\sum_{i=1}^{7} i^2$

$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$

$\sum_{i=1}^{n} a$ (ledd i $a_i = a$ for alle i)

$= \overbrace{a + a + a + \cdots + a}^{n}$

$= n \cdot a$ summen til rekken.

<u>Alle endelige rekker har en sum.</u>

(2)

$S_n = \sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+4+\cdots+n$

Summen til rekken

summen til denne rekken er $\frac{n(n+1)}{2}$.

$n=4$: $\frac{4\cdot 5}{2} = 2\cdot 5 = 10$.

summen av de 100 første naturlige tall er

$1+2+3+\cdots+100 = \frac{100\cdot 101}{2} = 50\cdot 101 = \underline{5050}$

$$S_n + S_n = \begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n \\ n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 2 + 1 \end{array}$$

$$= \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n}$$

$2S_n = n(n+1)$

Derfor $\underline{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$ $n \geq 1$

Eksempel Hva er summen av de første 100 posetive oddetall?

$1+3+5+7+\cdots+199$

$(2m+1 \quad m=0,1,\ldots 99)$

$a_m = 2m-1 \quad m=1,\ldots,100$

$a_{100} = 2\cdot 100 - 1 = 199$.

$\sum_{m=1}^{100}(2m-1) = \left(\sum_{m=1}^{100}(2m)\right) + \sum_{m=1}^{100}(-1)$

$= 2\left(\sum_{m=1}^{100} m\right) + (-1)\cdot 100 = 2\cdot\frac{100\cdot 101}{2} - 100$

$= 100\cdot 101 - 100 = 100(101-1) = 100^2 = \underline{\underline{10000}}$

(3) En aritmetisk rekke er en rekke tilordnet en aritmetisk følge.

$$a_1, \ a_1 + \underset{\uparrow}{d} = a_2, \ a_2 + d = a_3, \ \ldots$$
← differanse

$$\underline{a_n = a_1 + (n-1)d} = (a_1 - d) + n \cdot d$$

17.5

Sum til aritmetiske følger

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \Sigma_{i=1}^{n} a_i$$

$$= \Sigma_{i=1}^{n} (a_1 - d) + i \cdot d$$

$$= \Sigma_{i=1}^{n} (a_1 - d) + d \, \Sigma_{i=1}^{n} i$$

$$= n(a_1 - d) + d \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= n\left[a_1 - d + d\frac{n+1}{2}\right] = \frac{n}{2}\left[2a_1 - 2d + d \cdot n + d\right]$$

$$= \underline{\frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1))} = \frac{n}{2}\Big(a_1 + \underbrace{a_1 + d(n-1)}_{a_n}\Big)$$

$$= \underline{\underline{\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}}$$

a_1 første ledd, a_n siste ledd, n antall ledd

oppg Aritmetisk rekke med $a_1 = 3$, $d = 2$

Vi legger sammen ledd til summen blir 483.

Hvor mange ledd har vi da lagt sammen?

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1)) = \frac{n}{2}(2 \cdot 3 + 2 \cdot (n-1))$$

$$= n(3 + n - 1) = n(n+2) = 483.$$

Dette gir $\underline{n = 21}$ ledd

$$\left(\begin{aligned} 21 \cdot 23 &= (20+1)(20+3) \\ &= 400 + (1+3) \cdot 20 + 3 \\ &= 483 \end{aligned} \right)$$

(4) Finn summen av alle naturlige tall mindre enn eller lik 1000 som er delelige med både 6 og 15.

Et tall er delelig med både $6 = 2 \cdot 3$ og $15 = 3 \cdot 5$ hvis og bare hvis det er delelig med $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Dette følger fra entydig primtallsfaktorisering.

Følgen av positive tall delelig med både 6 og 15 er da den aritmetiske følgen gitt ved

$$a_n = 30 \cdot n \qquad n \geq 1.$$

a_n er mindre enn eller lik 1000 så lenge $n \leq 33$ (siden $30 \cdot 33 = 990 < 1000$ og $30 \cdot 34 = 1020 > 1000$.)

Summen av tallene er $\frac{a_1 + a_{33}}{2} \cdot 33 = \frac{30+990}{2} \cdot 33$

$$= \frac{1020}{2} \cdot 33 = \frac{1000}{2} \cdot 33 + 10 \cdot 33$$

$$= 16500 + 330$$

$$= \underline{\underline{16830}}$$

(alternativt $30 \cdot \frac{34 \cdot 33}{2} = 16830$)

5

17.6 Sum av geometriske rekker

En geometrisk rekke er rekken tilordnet en geometrisk følge

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ $\qquad a_n = k^{n-1} a_1 \quad n \geq 1$

$a_1(1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-1})$ $\qquad$ n ledd

Resultat: Formel for summen til en geometrisk rekke

$$1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{k^n - 1}{k-1} & k \neq 1 \\ n & k = 1 \end{cases}$$

Bevis $\quad k = 1$ ok

$k \neq 1$ $\quad$ La $S_n = 1 + k + \cdots + k^{n-1}$ (summen)

$$k \cdot S_n = k + k^2 + k^3 + \cdots + k^n$$

$$- \quad S_n = -(1 + k + k^2 + \cdots \quad k^{n-1})$$

$$kS_n - S_n = k^n - 1$$

$$(k-1) S_n = k^n - 1$$

del med $k - 1 \neq 0$ på begge sider gir resultatet.

Eks $\quad 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = \dfrac{2^n - 1}{2 - 1}$

$$= \underline{2^n - 1}$$

(vi fann dette tidligere og.)

(6)

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{(-1/2)}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right)$$

$$=\underline{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}$$

oppg. Finn summen til den geometriske rekken $5+\frac{10}{3}+\frac{20}{9}+\frac{40}{27}+\cdots+a_{10}$.

$k=\frac{10/3}{5}=\frac{2}{3}$ $\quad a_1=5$

$a_n=a_1\cdot k^{n-1}=5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

Rekken er : $5\left(1+\frac{2}{3}+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^9\right)$

Summen er : $5\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{10}-1}{\frac{2}{3}-1}=\frac{5}{-1/3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{10}-1\right)$

$$=\underline{15\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right)}$$