6. nov
2012

17.2 Aritmetiske følger

(1) En tallfølge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ er aritmetisk hvis $a_{n+1} = a_n + d$ for alle n. d kalles differansen

$3, 5, 7, 10, 12, \ldots$ er ikke en aritmetisk følge

$2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots$ kan denne følgen være aritmetisk?

Ja den kan vær en aritmetisk følge.

Da er $a_n = 2n$, for $n \geq 1$.

Eksempel. Finn de 7 første leddene til den aritmetiske følgen hvor $a_1 = 3$ og $d = -2$

$$3, 1, -1, -3, -5, -7, -9, \ldots$$

Hva er a_n? $\underline{a_n} = 3 + \underline{(n-1)}(-2)$.

Generelt: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \qquad n \geq 1$

$$a_n = a_m + (n-m)d \qquad n, m \geq 1.$$

En aritmetisk følge er bestemt av to ledd a_n, a_m hvor $n \neq m$.

Oppgave Bestem den aritmetiske følgen hvor $a_3 = 5$ og $a_5 = 9$

* $a_5 = a_3 + (5-3) \cdot d \qquad 9 = 5 + 2 \cdot d$

$d = \frac{9-5}{2} = \underline{2}$, $\underline{a_n} = a_3 + (n-3) \cdot 2 = \underline{-1 + 2 \cdot n}$

② - Skriv opp de 10 første leddene i følgen gitt ved $a_1 = -2$
$d = \frac{1}{2}$

- Hva er a_n?

$-2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

$$a_n = -2 + (n-1)\cdot \frac{1}{2} = \underline{-2.5 + \frac{n}{2}}$$

—

De positive heltallene som er delelige med 3 (ordnet etter størrelse) er

$3, 6, 9, 12, 15, \ldots$

Dette er en aritmetisk følge gitt ved

$$a_n = 3\cdot n$$

Differansen er $d = 3$, $a_1 = 3$

—

<u>oppgave</u> Beskriv det n-te leddet i følgen av naturlige <u>oddetall</u> som er delige med 3.
Er dette en aritmetisk følge?

3

14.3 Geometriske følger

En tallfølge $a_1, a_2, a_3, \dots$ er geometrisk

hvis $a_{n+1} = k \cdot a_n$ for $n \geq 1$

k kalles kvotienten

(hvis $a_n \neq 0$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$)

$\frac{1}{2}, 1, 2, 5, 10, 20, \dots$ er ikke en geometrisk følge

$\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots$ kan være en geometrisk følge

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \qquad k = 2.$$

I en geometrisk følge er

$$\underline{a_n = a_1 \cdot k^{n-1}} \qquad n \geq 1$$

og $$a_n = a_m k^{n-m} \qquad n, m \geq 1$$
$(n > m \text{ hvis } k = 0)$

$k = 1$ Da er $a_{n+1} = a_n \; (= a_1)$

$a_1, a_1, a_1, a_1, \dots$

$k = 0$ $\quad a_1, 0, 0, 0, 0, \dots$

oppgave Finn de 7 første leddene til den geometriske følgen $a_1 = 1$, $k = \frac{-1}{2}$.

Hva er a_n?

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}$$

$1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{-1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$ $\quad \left(\quad a_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1} \right.$

oppgave (4)

Bestem alle geometriske følger slik at

$$a_2 = 1 \quad \text{og} \quad a_4 = 4.$$

$$a_4 = a_2 \cdot k^{4-2} = a_2 \cdot k^2$$

Så $k^2 = \frac{a_4}{a_2} = \frac{4}{1} = 4.$

Kvotienten er $k = -2$ eller $k = 2$.

$$\underline{a_n = a_2 \cdot k^{n-2}} = k^{n-2} \qquad \left(a_1 = \frac{a_2}{k}\right)$$

$k = 2$: $a_n = 2^{n-2}$

$\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

$k = -2$: $a_n = (-2)^{n-2}$

$-\frac{1}{2}, 1, -2, 4, -8, 16, \ldots$

Anta a_n og a_m er kjent (og ikke lik 0) $n \neq m$.

Hvis $n-m$ er oddetall. Da finnes det én geometrisk følge med gitt verdi for a_n og a_m

Hvis $n-m$ er partall.

$\frac{a_n}{a_m} < 0$ ingen mulig geometrisk følge (med reelle tall)

$\frac{a_n}{a_m} > 0$ to geometriske følger med gitte verdier for a_n og a_m.

Det finnes ikke en (reell) geometrisk følge med $a_1 = 1$, $a_3 = -4$.

5

(årlige) Renter

En prosent 1% er en hundredel

$$1\% = \frac{1}{100}$$

$$5\% = 0{,}05 = \frac{5}{100}$$

La P_0 være penge mengde i tiden 0

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$

r rentefoten
r renten

Renten av renter (årlig)

$$P_2 = (1+r)P_1$$
$$P_3 = (1+r)P_2 \quad \text{etc}$$

Geometrisk følge med kvotient $(1+r)$.

$$P_n = (1+r)^n P_0$$

(starter i P_0 ...)
$P_n = (1+r)^{n-1} P_1$

$r = 10\% = \frac{1}{10}$, $n = 10$

$$P_{10}^{geo.} = \left(1+\tfrac{1}{10}\right)^{10} P_0 = 2{,}59\ldots \cdot P_0$$

Ikke renter av renter (bare renten av det opprinnelige beløpet P_0)

Da er $P_{n+1} = P_n + r \cdot P_0$

Aritmetisk følge med differanse $P_0 \cdot r$

$$P_n = P_0 + n \cdot P_0 \cdot r = P_0(1 + r \cdot n)$$

$r = 10\%$ $n = 10$

$$P_{10}^{aritmetisk} = \left(1+\tfrac{1}{10}\cdot 10\right)P_0 = 2 \cdot P_0$$

Vi får ca 60% mer i renter når vi får renter av renten med 10% årlige renter i 10 år.