EKSAMEN 1 JUNI 2010.

1. $P(z) = z^3 - 3z^2 - 9z - 5$

a) $P(\sqrt{5}) = \underbrace{(\sqrt{5})^3}_{5\cdot\sqrt{5}} - 3\underbrace{(\sqrt{5})^2}_{5} - 9\sqrt{5} - 5$

$= 5\cdot\sqrt{5} - 9\sqrt{5} - 3\cdot 5 - 5$

$= \underline{-4\sqrt{5} - 20}$

b) $P(z) = 0$

$z^3 - 3z^2 - 9z - 5 = 0.$

$z = -1$ er en løsning : $(-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) - 5$

$-1 - 3 + 9 - 5 = 0.$

$(z - (-1)) = (z+1)$ er en faktor i $P(z)$.

$$
\begin{array}{l}
z^3 - 3z^2 - 9z - 5 : z+1 = z^2 - 4z - 5 \\
\underline{z^3 + z^2} \\
\quad -4z^2 - 9z - 5 \\
\quad \underline{-4z^2 - 4z} \\
\qquad -5z - 5 \\
\qquad \underline{-5z - 5} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$P(z) = (z+1)(z^2 - 4z - 5)$

$= (z+1)(z-5)(z+1)$

$= (z+1)^2 (z-5)$

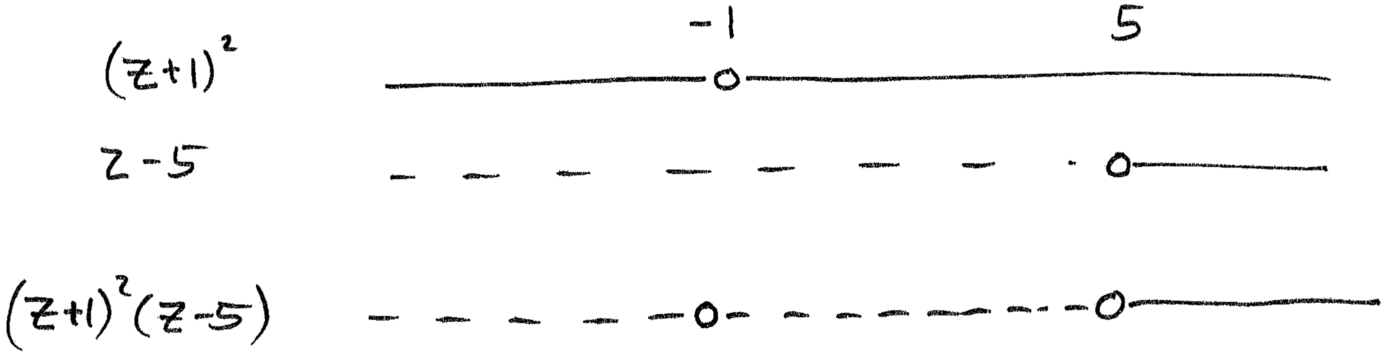
Så $P(z) = 0$ har løsningene $z = \underline{\underline{-1}}$ og $z = \underline{\underline{5}}$.

1 c

$$P(z) \leq 0$$

$$(z+1)^2(z-5) \leq 0$$

Fortegnskjema



Løsningen til $P(z) \leq 0$ er $\underline{\underline{z \leq 5}}$

2. $\vec{u} = [0, 1, 2]$ $\quad\quad$ $\vec{v} = [1, -3, -2]$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = [0,1,2] \cdot [1,-3,-2]$

$= 0 \cdot 1 + 1(-3) + 2(-2)$

$= \underline{\underline{-7}}$

$$\vec{U} \times \vec{V} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (-2-(-6))\vec{i} - (0-2)\vec{j} + (0-1)\vec{k}$$

$$= \underline{\underline{[4, 2, -1]}}$$

$\vec{V} \times \vec{U} = -\vec{U} \times \vec{V} = \underline{[-4, -2, 1]}$

b) Vi finner vinkelen θ mellom $\vec{U}$ og $\vec{V}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{|\vec{U}| \cdot |\vec{V}|} = \frac{-7}{\sqrt{1+4}\,\sqrt{1+9+4}} = \frac{-7}{\sqrt{5 \cdot 14}}$$

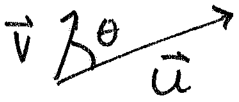
$$= \frac{-7}{\sqrt{70}}$$

$$\theta = \arccos \frac{-7}{\sqrt{70}} \approx 146.8^\circ.$$

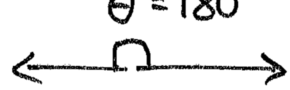
Så $\vec{U}$ og $\vec{V}$ er verken parallelle eller ortogonale.

($\overrightarrow{\text{en alternativ}}$ fremgangsmåte)

b) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\theta$

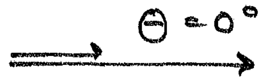


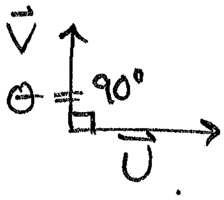
$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta$



$\vec{U}$ og $\vec{V}$ er parallelle:

$\Rightarrow \vec{U} \times \vec{V} = \vec{0} = [0,0,0]$





$\vec{U}$ og $\vec{V}$ er ortogonale

$\Rightarrow \vec{U} \cdot \vec{V} = 0$

Siden $\vec{U} \times \vec{V} \neq \vec{0}$ så er $\vec{U}$ og $\vec{V}$ ikke parallelle

og siden $\vec{U} \cdot \vec{V} \neq 0$ så er de heller ikke ortogonale.

2c) $\vec{w} = [1, 3, 3]$

$\vec{u} \times \vec{v}$ er en normalvektor til planet utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

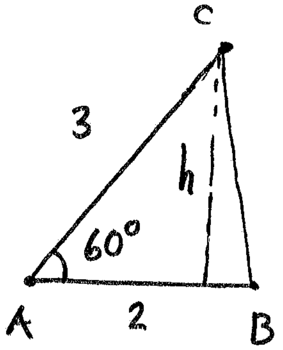
Hvis $\vec{w}$ ligger i planet utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$ så må $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$.

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = [4, 2, -1] \cdot [1, 3, 3]$$
$$= 4 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = \underline{7} \neq 0$$

Derfor ligger $\vec{w}$ <u>ikke</u> i planet utspent av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

3

a)



Arealet er

$$\frac{\text{bredd} \cdot \text{høyde}}{2}$$

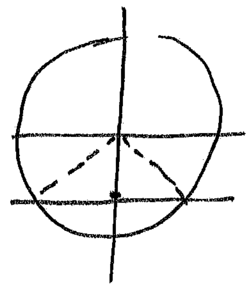
$$= \frac{2 \cdot 3\sin(60°)}{2}$$

$$= \frac{2 \cdot 3\,\sqrt{3}/2}{2} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{3}}{2}}}$$

b)

$$5\sin\alpha + 3 = 0 \qquad \alpha \in [0, 2\pi\rangle$$

$$\sin\alpha = \frac{-3}{5}$$

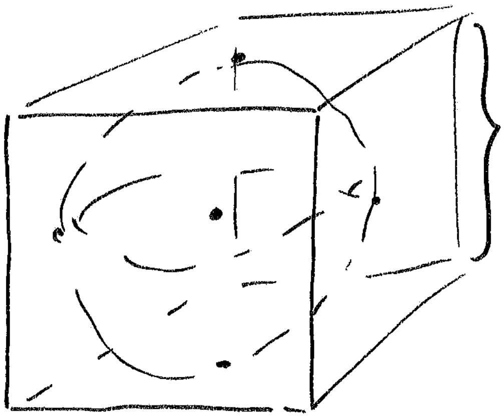


Generelt: $\alpha = \arcsin\left(\frac{-3}{5}\right) + 2\pi \cdot n$

$\alpha = \pi - \arcsin\left(\frac{-3}{5}\right) + 2\pi \cdot n$

$\alpha = \underline{216{,}87\ldots}°$ og $\alpha = \underline{323{,}13\ldots}°$

c)



L=5cm

Vi ser at radius r er $\frac{L}{2} = 2.5$cm når kula er størst mulig.

Volumet til legemet som gjenstår når kula er fjernet: $L^3 - \frac{4\pi}{3}\left(\frac{L}{2}\right)^3$

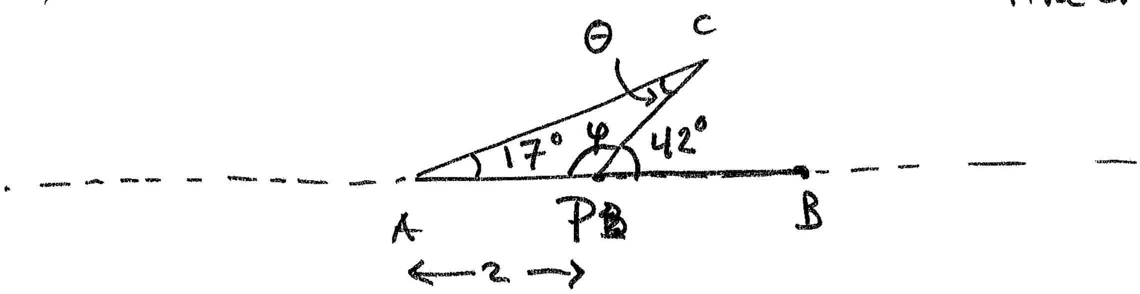
$$= L^3 - L^3 \cdot \frac{4\pi}{3 \cdot 8} = \underline{L^3\left(1 - \frac{\pi}{6}\right)}$$

L=5cm

$= \underline{\underline{125\left(1-\frac{\pi}{6}\right)\text{cm}^3}}$ $\left(= \underline{59.6\ldots\ \text{cm}^3}\right)$

3 d)

Hva er $|AC|$?



$$\varphi = 180° - 42° = \underline{138°}$$

$$17° + \varphi + \theta = 180°$$

$$\theta = 180° - 17° - (180° - 42°)$$

$$= 42° - 17° = \underline{25°}$$

Sinussetningen: $\dfrac{|AC|}{\sin \varphi} = \dfrac{|AP|}{\sin \theta}$

$$|AC| = \sin(138°) \cdot \frac{2}{\sin(25°)}$$

$$= \underline{3.166\ldots}$$

Oppg 4

a)

i) $f(x) = 2 + \sqrt{x} + 1/x$

$= 2 + x^{1/2} + x^{-1}$

$f'(x) = (2)' + (x^{1/2})' + (x^{-1})'$

$= 0 + \frac{1}{2} x^{-1/2} + (-1) x^{-2}$

$$\underline{\underline{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}}}$$

ii) $g(x) = (x^2+1)\cos(\pi x)$

$g'(x) = (x^2+1)'\cos(\pi x) + (x^2+1)(\cos(\pi x))'$

(ved produktregelen)

$= 2x \cdot \cos(\pi x) + (x^2+1)(-\sin(\pi x) \cdot (\pi x)')$

$$g'(x) = \underline{\underline{2x\cos(\pi x) - \pi(x^2+1)\sin(\pi x)}}$$

iii) $h(x) = \ln(e^{2x}\sin(x))$

$= \ln(e^{2x}) + \ln(\sin(x))$

$= 2x + \ln(\sin(x))$

$h'(x) = 2 + \frac{1}{\sin x}(\sin x)'$

$$\underline{\underline{h'(x) = 2 + \frac{\cos x}{\sin x}}}$$

4 b)

ii) $$f'(x) = \frac{1}{x^3-x}\,(x^3-x)' = \frac{3x^2-1}{x^3-x}$$

De stasjonære punktene til $f(x)$ er punkter hvor $f'(x)=0$.

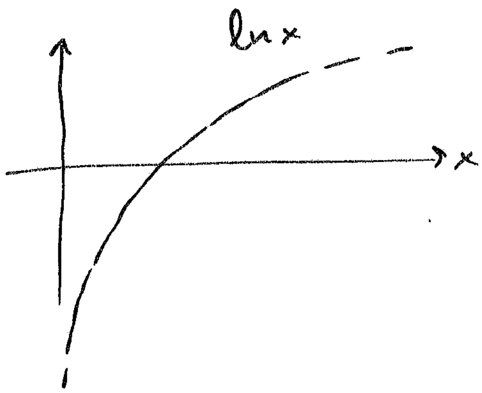
$f'(x) = 0$ når $3x^2-1=0$ (og x er i definisjonsmengden til $f(x)$).

$$3x^2-1=0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 1/3$$
$$x = 1/\sqrt{3} \quad \text{eller} \quad x = -1/\sqrt{3}.$$

$\frac{-1}{\sqrt{3}}$ er i definisjonsmengden, mens $\frac{1}{\sqrt{3}}$ er ikke i def.mengden.

De stasjonære punktet er $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right)$
$$= \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \ln\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)\right)$$
$$= \underline{\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \ln 2 - \tfrac{3}{2}\ln 3\right)}$$

iii)



$$\lim_{x\to\infty} \ln(x^3-x) = +\infty$$
siden $x^3-x \to \infty$ når $x\to\infty$.

$$\lim_{x\to 1^+} \ln(x^3-x) = -\infty$$
siden $x^3-x = x(x^2-1) \to 0^+$ når $x \to 1^+$.

$f(x)$ har ikke en minste eller største verdi.

4 c) $\int \sqrt{x}\,dx$

$$= \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + c$$

$$= \underline{\underline{\frac{2x\sqrt{x}}{3} + c}}$$

$$\int \frac{3}{7-x}\,dx = 3\int \frac{1}{7-x}\,dx$$

La $u = 7-x$. Da er $u' = (-x)' = -1$

substitusjon $du = -dx$

$$3\int \frac{1}{7-x}\,dx = 3\int \frac{1}{u}(-du) = -3\ln|u| + c$$

$$\int \frac{3}{7-x}\,dx = \underline{-3\ln|7-x| + c}$$

$$\int \frac{3x}{x^2-3}\,dx$$

La $u = x^2-3$.

$u' = 2x$ $\qquad du = 2x\,dx$

$$\int \frac{\frac{3}{2}(2x)}{x^2-3}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{2}\ln|u| + c$$

$$= \underline{\frac{3}{2}\ln|x^2-3| + c}$$

4 c) $\int (x+1)\sin(2x)\,dx$

$$= \int x \sin(2x)\,dx + \int \sin(2x)\,dx$$

Vi regner ut det første integralet:

$\int \overset{u}{x}\, \overset{v'}{\sin(2x)}\,dx$. Vi bruker delvis integrasjon og velger $v = \frac{-1}{2}\cos(2x)$.

$$\int u \cdot v'\,dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx$$

$$\int x \sin 2x\,dx = x\left(\frac{-1}{2}\cos(2x)\right) - \int 1\left(\frac{-1}{2}\cos(2x)\right)dx$$

$$= \frac{-x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) + c$$

Det andre integralet er

$$\int \sin 2x\,dx = -\frac{\cos 2x}{2} + c.$$

Derfor er

$$\int (x+1)\sin(2x)\,dx = \frac{-x}{2}\cos 2x + \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + c$$

$$= \frac{-1}{2}(x+1)\cos(2x) + \frac{\sin 2x}{4} + c$$

(Alternativt kunne vi utført delvis integrasjon:

$\int \underbrace{(x+1)}_{u}\,\underbrace{\sin 2x}_{v'}\,dx$.

Dette hadde vært enklere)

4 d) $\int_{-1}^{1} \left(x^2 - x(x+1) \right) dx$

$= \int_{-1}^{1} (x^2 - x^2 - x)\, dx = \int_{-1}^{1} -x \, dx$

$= 0$ siden $-x$ er en odd funksjon og vi integrerer fra -1 til 1.

$\int_{-\pi}^{\pi} x^{17} \cos x \, dx = 0$

siden $(-x)^{17} \cos(-x) = -(x^{17} \cos x)$

så $x^{17} \cos x$ er en odd funksjon og vi integrere fra $-\pi$ til π.

Vi forklarer her følgende resultat.

La $f(x)$ være en kontinuerlig funksjon på $[-a, a]$. Hvis $f(x)$ er en odd funksjon ($f(-x) = -f(x)$) da er $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

bevis 1: $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ substitusjon $u = -x$
$du = -dx$

$$\int_{a}^{0} f(-u)(-du)$$

$$= \int_{0}^{a} f(-u)\,du = -\int_{0}^{a} f(u)\,du.$$

Så $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

Derfor er $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$.

bevis 2: Fra fundamentalteoremet finnes det en antiderivert $F(x)$ av $f(x)$.

$$(F(x) - F(-x))' = F'(x) - F'(-x)\,(-x)' = f(x) + f(-x) = 0$$

siden $f(x)$ er en odd funksjon.

Derfor er $F(x) - F(-x) = c$ en konstant.

setter inn $x = 0$: $0 = F(0) - F(0) = c$

så $c = 0$ og $F(x) = F(-x)$.

$\longrightarrow$

Vi konkluderer med at en antiderivert F av f er en jevn funksjon.

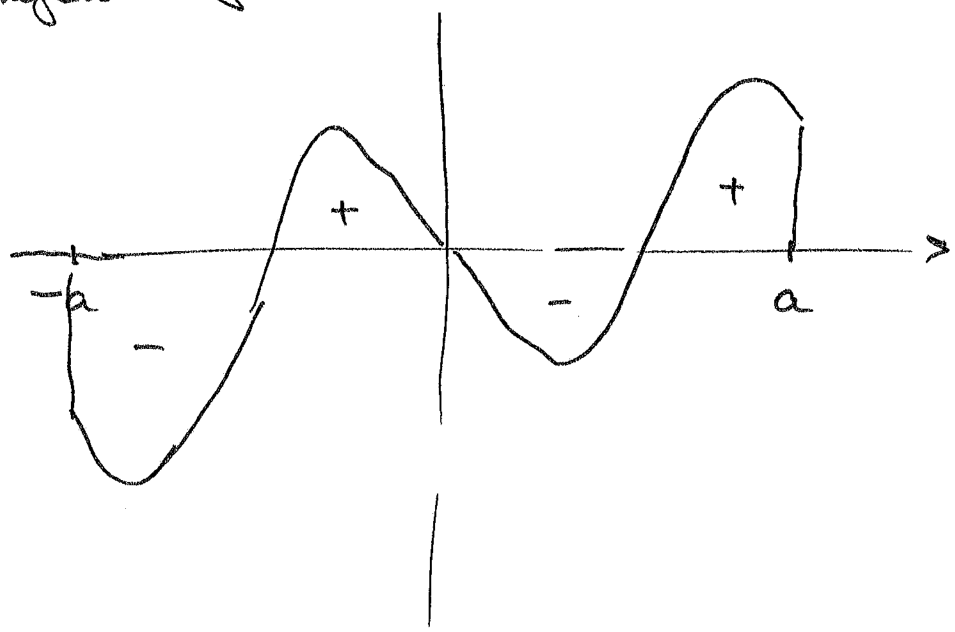
Derfor er $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-a}^{a} = F(a) - F(-a)$

$= F(a) - F(a)$

$= \underline{\underline{0}}$

$f(x)$ odd funksjon.

Grafen til $f(x)$ er symmetrisk om origo.



4 d)

$$\int_0^3 x e^{1-x}\, dx$$

Vi prøver med delvis integrasjon.

$U = x, \qquad U' = 1$

$V' = e^{1-x} \qquad$ velger $V = -e^{1-x}$.

$$\int x e^{1-x} dx = x(-e^{1-x}) - \int 1 \cdot (-e^{1-x})\, dx$$

$$= -xe^{1-x} + (-e^{1-x}) + c$$

$$\int_0^3 x e^{1-x} dx = -(x+1)e^{1-x} \Big|_0^3$$

$$= -4e^{-2} + 1 \cdot e^1 = \underline{\underline{e - \frac{4}{e^2}}}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^6\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

Substitusjon $\quad U = \sin\left(\frac{x}{2}\right), \qquad U' = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$U(\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$U(-\pi) = \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^6\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_{-1}^{1} U^6 \cdot 2\, dU$$

$$= \frac{2U^7}{7} \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{7}\left(1^7 - (-1)^7\right) = \underline{\underline{\frac{4}{7}}}$$