26.03.2012 Integrasjon

(1) 15.1 Ubestemte integral.

En antiderivert til $f(x)$ er en funksjon $F(x)$ slik at

$$F'(x) = f(x)$$

Eksempel $f(x) = 2x$

En antiderivert til $f(x)$ er x^2.

$x^2 + 3$ er også en antiderivert til $2x$.

Det ubestemte integralet til $f(x)$ er klassen av alle antideriverte til $f(x)$.

Det skrives som $\int f(x)\,dx$

integranden

integral-tegnet

Hvis $F'(x) = 0$ (på en sammenhengende intervall) da må $F(x)$ være en konstant funksjon.

$F(x) = c$ c reelt tall.

$$\int 0\,dx = C \quad (c \text{ et reelt tall})$$

klassen av konstante funksjoner.

② Hvis $F_1(x)$ og $F_2(x)$ er to antideriverte funksjoner til $f(x)$, da er $F_1(x) - F_2(x)$ en konstant. :

$$\left(F_1(x) - F_2(x)\right)' = F_1'(x) - F_2'(x)$$
$$= f(x) - f(x) = 0$$

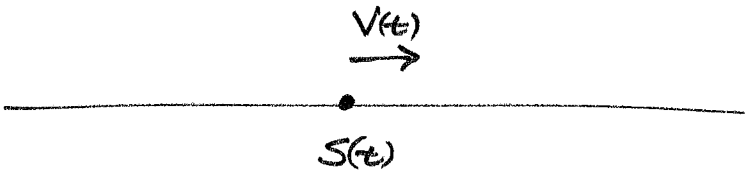
så $F_1(x) - F_2(x)$ må være en konstant.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

hvor $F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$.

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

Eksempel



$$S'(t) = V(t)$$

$S(t)$ er en antiderivert til $V(t)$.

$$S(t) = \int V(t)\,dt$$

Posisjonen $s(t)$ er ikke bestemt av farten $V(t)$ alene. Vi må også kjenne posisjonen i et gitt tidspunkt.

(3) $V(t) = (2\,m/s^2)\cdot t$

$S(3s) = 5\,m$

$S(t) = (1\,m/s^2)\cdot t^2 + c$. c konstant.

$S(3s) = (1\,m/s^2)\cdot(9s^2) + c = 5m$

$= 9m + c = 5m$

så $\underline{c = ÷4m}$

$$\underline{S(t) = (1\,m/s^2)\cdot t^2 - 4m}.$$

Bevegelseslikningen

$a(t)$ akselleresjon $\qquad a(t) = V'(t) = S''(t)$

$V(t)$ $\qquad V(t) = S'(t)$

$S(t)$

$a(t) = a$ konstant.

$V(t) = \int a\,dt = a\cdot t + c$.

$V(0) = c \qquad V_0 = V(0)$

$V(t) = a\cdot t + V_0$

$S(t) = \int V(t)\,dt = \int a\cdot t + V_0\,dt$

$= a\frac{t^2}{2} + V_0\cdot t + c$

$S(0) = c \qquad S_0 = S(0)$

$$\underline{S(t) = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + S_0}$$

④

$$\int 3\,dx = 3x + C$$

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$$

$$\int n x^{n-1}\,dx = x^n + C$$

$$\int x^n\,dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C & n \neq -1 \\ \ln|x| + C & n = -1 \end{cases}$$

$(n=-1 \quad \int \frac{1}{x}\,dx)$

oppg.

$$\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \underline{\frac{2}{3} \cdot x^{3/2} + C} = \underline{\frac{2}{3} x\sqrt{x} + C}$$

$$\int \frac{1}{3x}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt[5]{x}}\,dx = \int \frac{1}{x \cdot x^{1/5}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x^{6/5}}\,dx = \int x^{-6/5}\,dx$$

$$= \frac{x^{-\frac{6}{5}+1}}{1-\frac{6}{5}} + C = \frac{x^{-1/5}}{-1/5} + C = \underline{\underline{\frac{-5}{\sqrt[5]{x}} + C}}$$

(5)

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$$

Hvis $F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$

$$F'(x) = f(x),$$

da er $(k\,F(x))' = k(F(x))' = k \cdot f(x)$.

så $k \cdot F(x)$ er en antiderivert til $f(x)$.

Merk $\int 0 \cdot 2x\,dx = 0 \int 2x\,dx + k$

$$= 0\,(x^2 \cancel{+c}) + k = 0 + k$$

$$= k$$

oppg

$$\int \frac{5}{x^2}\,dx$$

$$= 5 \int \frac{1}{x^2}\,dx = 5 \int x^{-2}\,dx$$

$$= 5\left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right) + c$$

$$= 5 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + c = \underline{\frac{-5}{x} + c}$$

$$\int \frac{5\sqrt{x}}{7\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{5}{7} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

$$= \frac{5}{7} \int \frac{x^{1/2}}{x^{1/3}}\,dx = \frac{5}{7} \int x^{1/2} \cdot x^{-1/3}\,dx$$

$$= \frac{5}{7} \int x^{1/6}\,dx = \frac{5}{7}\left(\frac{x^{1+1/6}}{1+1/6}\right) + c$$

$$= \frac{5}{7} \cdot \frac{x\sqrt[6]{x}}{7/6} + c = \underline{\frac{5 \cdot 6}{7^2}\,x\sqrt[6]{x} + c}$$

(6) $\int f(x) + g(x)\, dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

La $F(x)$ og $G(x)$ være antiderivert til henholdsvis f og g.

$$\left(F(x) + G(x)\right)' = F'(x) + G'(x)$$
$$= f(x) + g(x)$$

Så $F(x) + G(x)$ er en antiderivert til $f(x) + g(x)$.

$$\int \left(1 + \frac{1}{x} + x\right) dx$$
$$= \int 1\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx + \int x\,dx$$
$$= \underline{x + \ln|x| + \frac{x^2}{2} + C}$$

$$\int e^x + 3\sin x \; dx$$
$$= \int e^x\,dx + 3\int \sin x\,dx$$
$$= e^x + 3(-\cos x) + C$$
$$= \underline{e^x - 3\cos x + C}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$