13.03.2012 18.3 - 18.5 Sannsynlighet.

1 Sannsynlighets modell.

Utfallsrom S (mengde)

elementene i S kalles utfall

Eks Kaste mynt : Uttfallsrommet $S = \{Mynt, Krone\}$

Terning : — " — $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Undermengder av S er mengder av noen utvalgte utfall.

Hendelser er undermengder av S.

(I blant utelates noen undermengder av S.)

Sannsynlighets mål P.

P : Hendelser $\longrightarrow [0, 1]$ mengden av relle tall mellom 0 og 1.

Eks Terningkast $\{3, 4, 5, 6\} \subset S$ er en hendelse : "vi får minst tre".

$\{2, 4, 6\}$ er hendelsen : utfallet er et jevnt tall.

Uniform sannsynlighets modell.

S endelig. N antall elementer i S.

Hvis sannsynligheten er lik for alle utfall i S

er $P(x) = \frac{1}{N}$ $x \in S$.

A hendelse . elementene i A kalles gunstige utfall

(2) $P(A) = \left(\underset{x \in A}{\text{Summen av}} \ P(x) \right) = \frac{\text{antall elementer i } A}{\text{— '' — } S}$

Hva er sannsynligheten for hendelsen: større enn eller lik 3

når vi kaster en terning?

Hendelsen er $H = \{3,4,5,6\}$, 4 elementer

$P(H) = \frac{4}{6} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

Egenskaper til P:

$\underline{P(S) = 1}$.

A, B hendelser $A \cap B = \emptyset$ (disjunkte)

$\underline{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

Konsekvenser: A hendelse $S \setminus A$, komplementet til A

$S \setminus A \cup A = S$

$S \setminus A \cap A = \emptyset$

$1 = P(S) = P(S \setminus A \cup A) = P(S \setminus A) + P(A)$

$\underline{P(S \setminus A) = 1 - P(A)}$.

$P(\emptyset) = 0$

Hva er $P(A \cup B)$ for generelle hendelser A og B?

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

($(A \cap B) \cup (A \setminus A \cap B) = A$

disjunkt (snittet er tomt)

$P(A \cap B) + P(A \setminus A \cap B) = P(A)$

$P(A \setminus A \cap B) = P(A) - P(A \cap B)$

$A \cup B = A \setminus A \cap B \cup B$

disjunkt.

$$P(A \cup B) = \underbrace{P(A \setminus A \cap B)}_{P(A) - P(A \cap B)} + P(B)$$

$P(A \cup B) = \underline{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$)

Stokastisk funksjon $f : S \to \mathbb{R}$

(målbar).

Eks Vi kaster en mynt tre ganger.

4 Det er $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ forskjellige utfall.

Utfallsrommet:

$\{MMM, MKK, KMK, KKM,$
$KKK, KMM, MKM, MMK\}.$

$\cong \{M, K\} \times \{M, K\} \times \{M, K\}$ Kartesisk produkt.

Hendelsen: en mynt og to kroner H_1.

$H_1 = \{MKK, KMK, KKM\}$

$H_0 = \{KKK\}$ 0 mynt 3 kron

$H_2 = \{MMK, MKM, KMM\}$ 2 mynt 1 krone

$H_3 = \{M, M, M\}.$

Gå utifra uniform sannsynlighetsfordeling.

$P(x) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ x utfall.

$P(H_0) = \frac{1}{8}$

$P(H_1) = \frac{3}{8}$

$P(H_2) = \frac{3}{8}$

$P(H_3) = \frac{1}{8}.$

Anta $\quad P(\text{Mynt}) = x = \frac{1}{4}$ $\quad$ Ny krone som ikke er rettferdig:

(5) $\quad P(\text{Krone}) = y = 1 - x = \frac{3}{4}$.

Hva er sannsynligheten for hendelsene

$H_0, H_1 \ H_2 \ H_3$?

$H_3 = \{M, M, M\}$

$$P(H_3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$P(H_0) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

$$P(H_1) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{9}{64} = \frac{27}{64}$$

$$P(H_2) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{3}{64} = \frac{9}{64}$$

H_0, H_1, H_2, H_3 disjunkte og union deres er hele utfallsrommet. Derfor $P(H_0) + P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$

Tilbake til en rettferdig krone:

Vi kaster mynten n ganger $\quad (n = 100)$

Sannsynligheten for å få mynt hver gang er

$\frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$.

Dette er sannsynligheten til hvert utfall.

Hva er sannsynligheten for å få krone en gang?

Hendelsen, krone en gang er: $H_1 : \{ KM \cdots M, MKM \cdots M,$

$\ldots, MM \cdots MK \}$. $\quad$ n elementer.

(6) $P(H_1) = n \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^n}$.

Faktum :

H_k : hendelsen k mynt.

$$P(H_k) = \underline{\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{2^n}}.$$

hvor $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

$n = 100$

$$P(H_{47}) = \frac{1}{2^{100}} \frac{100!}{47! \cdot 53!} \sim 0.07$$

oppgave.

Vis at $P(H_k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{2^n}$.

Hint bruk binomial formelen fra forrige gang.

oppgave. To terninger kastes

7 (rød og blå terning).

Hva er utfallsrommet?

$$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), \ldots \ldots (6,5), (6,6) \}$$

antall elementer i S er 36 $(= 6 \cdot 6)$.

Gå utfra at terningen er rettferdig.

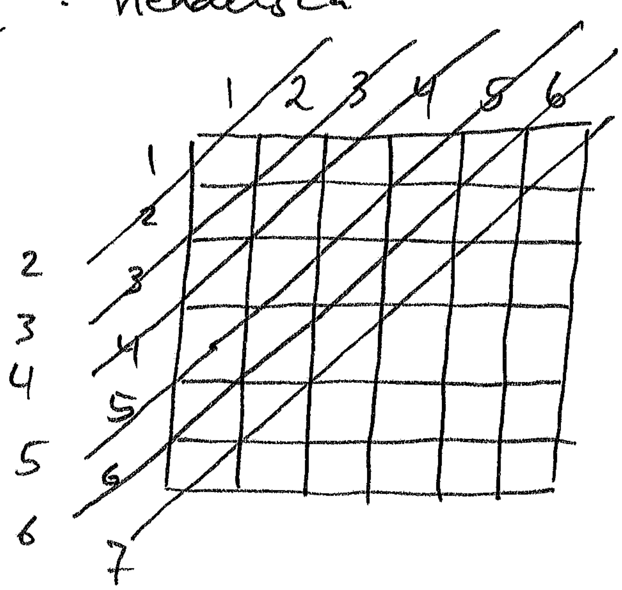
Da er sannsynligheten for hver av utfallene i S lik $\frac{1}{36}$.

Beskriv hendelsen: summen av terningene er 4.

$$H_4 = \{ (1,3), (2,2), (3,1) \}$$

$$P(H_4) = \frac{3}{36} = \underline{\frac{1}{12}}.$$

H_n : hendelsen: summen av terningene er n.



antall elementer

$|H_{12}| = |H_2| = 1$

$|H_{11}| = |H_3| = 2$

$|H_{10}| = |H_4| = 3$

$|H_9| = |H_5| = 4$

$|H_8| = |H_6| = 5$

$|H_7| = 6$

$$P(H_n) = \frac{|H_n|}{36}$$

(8)

$$P(H_2) = P(H_{12}) = \frac{1}{36}$$

$$P(H_3) = P(H_{11}) = \frac{1}{18}$$

$$P(H_4) = P(H_{10}) = \frac{1}{12}$$

$$P(H_5) = P(H_9) = \frac{1}{9}$$

$$P(H_6) = P(H_8) = \frac{5}{36}$$

$$P(H_7) = \frac{1}{6}$$