8 mars 2012

(1) $Y(t)$ mengden av radioaktiv stoff i tidspunkt t.

Mengden som brytes ned per tidsenhet er **proporsjonal** til $Y(t)$

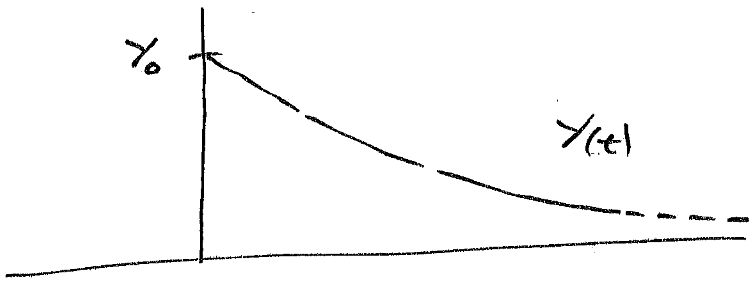
$$\frac{d}{dt}Y(t) = -k\,Y(t) \qquad k>0$$

Løsningene er $Y(t) = c \cdot e^{-k\cdot t}$, c konst.

$$\left(Y' = (c\cdot e^{-k\cdot t})' = c\,(e^{-kt})' = c e^{-kt}(-kt)' = c\cdot e^{-kt}\cdot(-k) = -k\cdot Y(t) \right)$$

$$Y(0) = c\cdot e^0 = c$$

$$\underline{Y(t) = Y_0\, e^{-kt}}.$$



C-14 dateringsmetode

Karbon $\rightarrow C_6^{12}$

$12 \leftarrow$ antall kjernepartikler nevtroner & protoner.

$6 \leftarrow$ antall protoner

I naturen:

C_6^{12}	99%
C_6^{13}	1%
C_6^{14}	10^{-9}

② C^{14} brytes ned

Beta stråling
elektronen

$$C_6^{14} \longrightarrow N_7^{14} + \beta \quad (+ \cdots)$$

I levende organismer er forholdet
$C^{14} : C^{12}$ konstant.

C^{14} har halveringstid på 5700 år
Tiden det tar før C^{14} - mengden halveres.

$$Y(t) = Y_0 e^{-kt}.$$

Y_0 : forholdet mellom C^{14} og C^{12} i levende organismer.

* Relaterer k og halveringstiden $t_{1/2}$

$$Y(t_{1/2}) = \frac{1}{2} Y_0$$

$$Y_0 e^{-k \cdot t_{1/2}} = \frac{1}{2} \cdot Y_0$$

$$e^{-k \cdot t_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

$$\ln(e^{-k \cdot t_{1/2}}) = -k \cdot t_{1/2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2^{-1}) = -\ln 2$$

$$\boxed{k \cdot t_{1/2} = \ln 2}$$

$$\underline{Y(t) = Y_0 e^{-(\ln 2 \cdot t / t_{1/2})}}$$

* Noen knokler har et forhold $C^{14} : C^{12}$

3) Som er $\frac{1}{4}$ av forholdet i levende organismer. Hvor gamle er knoklene?

$$Y(t) = \frac{1}{4} Y_0$$

$$Y_0 e^{-\ln 2 \cdot t/t_{1/2}} = Y_0 \cdot \frac{1}{4}$$

$$e^{-\ln 2 \cdot t/t_{1/2}} = \frac{1}{4}$$

$$-\ln 2 \cdot t/t_{1/2} = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln 2^{-2} = -2 \cdot \ln 2$$

$$t = 2 \cdot t_{1/2} = 2 \cdot 5700 \text{ år} = \underline{11400 \text{ år}}$$

Dette ser vi også direkte $\left(\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$.

3) En tregjenstand fra en viking grav har et forhold C^{14}/C^{12} som er 0,880 av forholdet til en levende organisme. Hvor gammel er gjenstanden?

$$Y(t) = Y_0 e^{-\ln 2 \cdot t/t_{1/2}} = 0.880 \cdot Y_0$$

$$-\ln 2 \cdot \frac{t}{t_{1/2}} = \ln(0.880)$$

$$t = t_{1/2} \cdot \frac{\ln(0.880)}{-\ln 2} = \underline{1051 \text{ år}}$$

Gjenstanden er fra ca år 960.

4

Eksempler på derivasjon

eks. $f(x) = x^2 + 2^x$

$$f'(x) = (x^2)' + (2^x)'$$
$$= 2\cdot x + \left(\left(e^{\ln 2}\right)^x\right)'$$
$$= 2x + \left(e^{(x\cdot\ln 2)}\right)' = 2x + e^{x\cdot \ln 2}\cdot \overbrace{(x\cdot \ln 2)'}^{\ln 2}$$
$$= \underline{2x + \ln 2 \cdot 2^x}$$

(generelt $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$, $a>0$)

oppg Deriver $x^e - e^x + e^3 - 3^e$.

$$(x^e - e^x + e^3 - 3^e)'$$
$$= (x^e)' - (e^x)' + \underbrace{(e^3 - 3^e)'}_{\text{konstant}}$$
$$= e\cdot x^{e-1} - e^x + 0$$
$$= \underline{e\,x^{e-1} - e^x}.$$

eks. $f(x) = x^x$ Deriver $f(x)$

(Triks: $x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x\cdot\ln x}$)

$$(x^x)' = \left(e^{x\cdot\ln x}\right)' = e^{x\cdot\ln x}\cdot(x\cdot\ln x)'$$
$$= x^x\left((x)'\cdot\ln x + x\cdot(\ln x)'\right)$$
$$= x^x\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right)$$
$$= \underline{(1+\ln x)\,x^x}$$

(5)

oppg Hva er den deriverte til $\sqrt[x]{x}$?

(Hint 1: $\sqrt[x]{x} = x^{(1/x)}$)

(Hint 2: $x^{\frac{1}{x}} = \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$)

$$\left(\sqrt[x]{x}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)'$$

$$= \left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\ln x\right)'$$

$$= \sqrt[x]{x}\cdot\left(\left(\frac{1}{x}\right)'\cdot\ln x + \frac{1}{x}\cdot(\ln x)'\right)$$

$$= \sqrt[x]{x}\left(\frac{-1}{x^2}\cdot\ln x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$= \underline{\frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}\left(1-\ln x\right)}$$

oppg Deriver $\operatorname{Log}\left(\sqrt[3]{x+1}\right)$.

(Hint $\operatorname{Log} x^r = r\cdot\operatorname{Log} x$)

$$\operatorname{Log}\left(\sqrt[3]{x+1}\right) = \operatorname{Log}\left((x+1)^{1/3}\right) = \frac{1}{3}\operatorname{Log}(x+1)$$

$\operatorname{Log}(x+1) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln 10}$ så

$$\left(\operatorname{Log}\sqrt[3]{x+1}\right)' = \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\ln 10}\cdot\ln(x+1)\right)'$$

$$= \frac{1}{3\ln(10)}\left(\ln(x+1)\right)'$$

$$= \frac{1}{3\ln 10}\,\frac{1}{(x+1)}\cdot(x+1)'$$

$$= \underline{\frac{1}{3\ln 10\,(x+1)}}.$$

6

oppg. Deriver $f(x) = \ln(8 \cdot x^3) - 3\ln x$

$$f(x) = \ln 8 + \ln x^3 - 3\ln x$$
$$= \ln 8 + 3\ln x - 3\ln x = \ln 8$$

så den deriverte er $\underline{\underline{0}}$

oppg Deriver $\ln(4^x)$

$$(\ln(4^x))' = (x \cdot \ln 4)' = \ln 4\,(x)'$$
$$= \underline{\underline{\ln 4}}$$

Her har vi brukt at $\ln a^r = r \cdot \ln a$

$$\ln((1+x^2)^x) = x\ln(1+x^2) \ldots$$