6.03.2012

11.9 Kurvedrøfting, eksponentialfunksjonen

(1) $f(x) = x e^{-x^2/2}$

Drøft $f(x)$ og lag en skisse av grafen til $f(x)$.

$f(-x) = -f(x)$ (oddefunksjon)

Nullpunkt: $x e^{-x^2/2} = 0$ $\qquad x=0$ eller $e^{-x^2/2} = 0$

Nullpunktet er $x=0$.

Ekstremalpunkt:

Produktregelen

$$f'(x) = \left(x e^{-x^2/2}\right)' = (x)' e^{-x^2/2} + x \cdot \left(e^{-x^2/2}\right)'$$

$$= 1 \cdot e^{-x^2/2} + x e^{-x^2/2} \cdot \left(-x^2/2\right)' \qquad \text{(kjerneregelen)}$$

$$= 1 e^{-x^2/2} + x(-x) e^{-x^2/2}$$

$$= \underline{e^{-x^2/2}(1 - x^2)}$$

$f'(x) = 0$ når $e^{-x^2/2} = 0$ (aldri null) eller $1 - x^2 = 0$

$x = -1$ og $x = 1$.

De kritiske punktene er $x=-1$ og $x=1$.

$-1 \qquad 1$

$f'(x)$ - - - - - - o———————o - - - - - - -

$(-1, f(-1)) = (-1, -e^{-1/2}) = \underline{\left(-1, \frac{-1}{\sqrt{e}}\right)}$ bunnpunkt

$(1, f(1)) = (1, e^{-1/2}) = \left(1, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ toppunkt.

$\frac{1}{\sqrt{e}} = 0.6065\ldots$

(2) $f''(x) = (f'(x))' = \left(e^{-x^2/2}(1-x^2)\right)'$

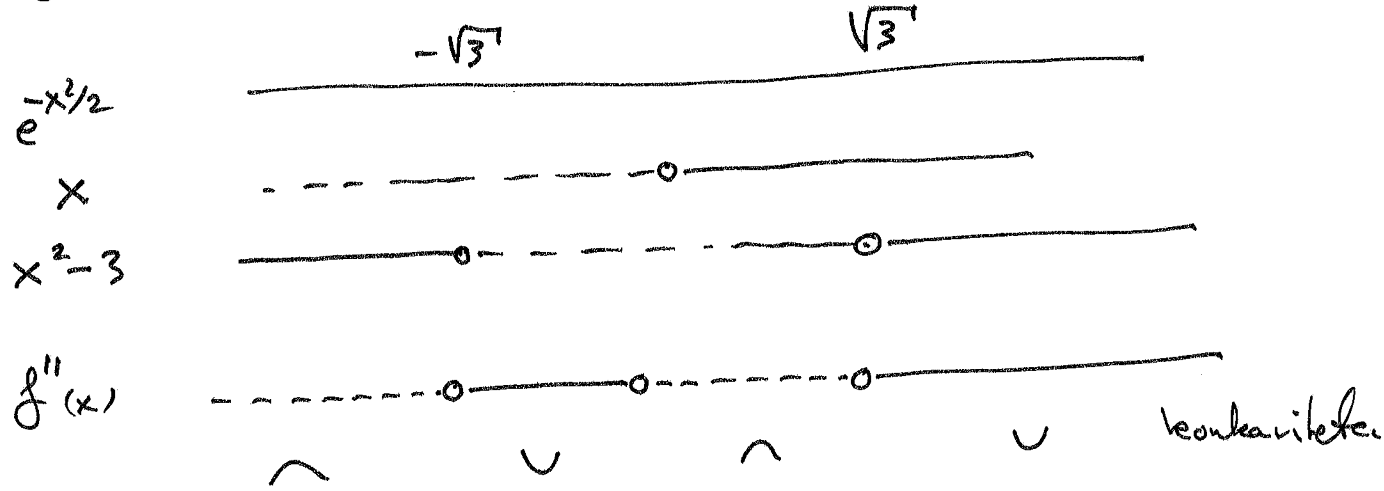
$$\underbrace{\left(e^{-x^2/2}\right)'}_{e^{-x^2/2}(-x)}(1-x^2) + e^{-x^2/2}\cdot\underbrace{(1-x^2)'}_{-2x}$$ produkt-regelen

$$= e^{-x^2/2}\left[(-x)(1-x^2) + -2x\right]$$

$$\left(\begin{aligned} x^2-3&=0\\ x^2&=3\\ x&=\pm\sqrt{3}\end{aligned}\right)$$

$$= e^{-x^2/2}\left[x^3-3x\right] = e^{-x^2/2}\cdot x\cdot(x^2-3).$$

$f''(x) = 0 \qquad x = 0, \quad x = \pm\sqrt{3}.$



$(0, f(0)) = (0,0)$ vendepunkt

$(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) = (\sqrt{3}, \sqrt{3}\,e^{-3/2})$ vendepunkt

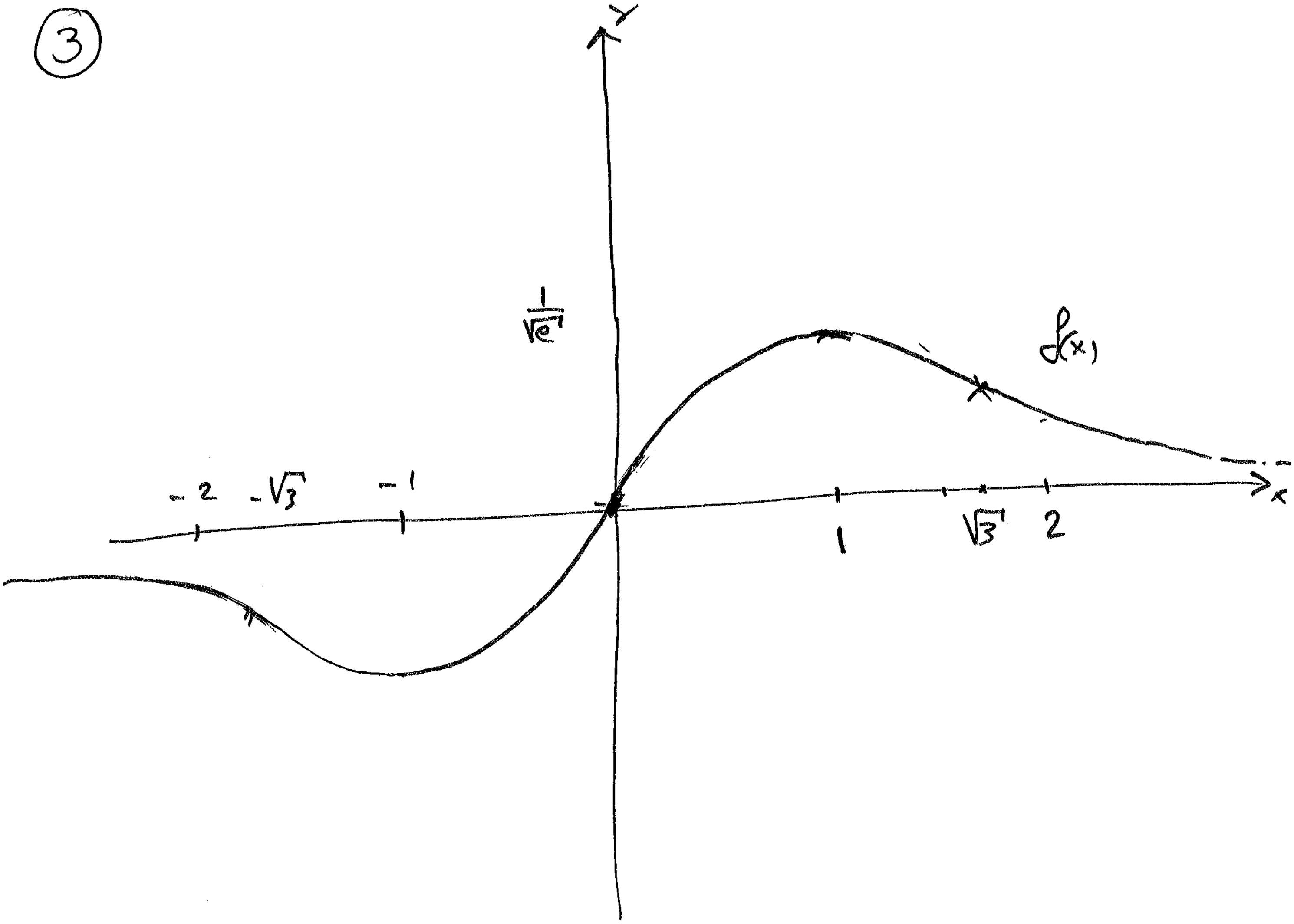
$(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})) = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}\,e^{-3/2})$ —— || ——

$$\sqrt{3}\,e^{-3/2} = \frac{\sqrt{3}}{e}\cdot e^{-1/2} \qquad \left(\sim \frac{2}{3}e^{-1/2}\right)$$

$f(x)$ har ingen vertikale asymptoter (kont. på $\mathbb{R}$)

$f(x)$ har x-aksen som horisontal asymptote.

③



<u>Oppgave</u> Drøft funksjonen:

$$f(x) = e^{-(x-\mu)^2/\sigma^2}$$

(Gauss-funksjon, normalfordeling)

(σ : sigma, μ : mu greske bokstaver)

(nullpunkt, ekstremalpunkt, vendepunkt, konkavitet, asymptoter. Lag en skisse av grafen.)

[Funksjonen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} f(x)$ er normalfordelingsfunksjonen med gjennomsnitt μ og varians σ^2
Denne funksjonen er viktig i statistikk]

④

Renter

Nominelle renter (pålydende rente).

Årlig rente p.a. (pro anno) $r_{p.a}$

Pengemengde i tiden $t=0$: $P_0 = 1000$kr

Etter m år er det: $P(m) = (1+r_{p.a})^m P_0$

Deler året i k deler.

$\frac{r}{k}$ rentefoten i perioden $\frac{1}{k}$ år.

Etter ett år : $\left(1+\frac{r}{k}\right)^k P_0$

Etter $\frac{m}{k}$-år : $\left(1+\frac{r}{k}\right)^m P_0$

$$= \left(\left(1+\frac{r}{k}\right)^k\right)^{m/k} P_0$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{r}{k}\right)^k = e^r$$

t tiden (med enhet år)

$$\underline{P(t)} = (e^r)^t P_0 = \underline{e^{r\cdot t} P_0}$$

$$P'(t) = (e^{rt} P_0)' = r\, e^{rt} P_0$$

$$\underline{P'(t) = r\, P(t)}$$

r momentan rente.

(5) Hva er momentan rente hvis årlig rente er 5% ?

$$P(1) = e^{r\cdot 1} P_0 = e^r \cdot P_0$$

årlig rente : $(1 + r_{p.a}) \cdot P_0$

så $e^r = 1 + r_{p.a}$

Hvis $r_{p.a} = 5\% = \frac{5}{100}$ så er

$$e^r = 1 + 0.05 = 1{,}05$$

$$r = \ln(1{,}05)$$

$$= 4{,}88\ \%$$

<u>Eks</u> $t = 10$ år $P_0 = 1000$ kr

Hva er pengemengden etter $t = 10$ år hvis

1) $r_{p.a} = 10\%$

2) $r = 10\%$

1) : $\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} \cdot 1000\text{kr} = 2594$ kr

2) : $e^{10 \cdot 1/10} \cdot 1000\text{kr} = e \cdot 1000\text{kr} = 2718$ kr

oppg. K. setter inn 10^6 kr i en bank.

6 Utlånsrenten er 3% p.a.

K. tar ut pengene etter 4 mnd. ($\frac{1}{3}$ år)

Hva er avkastningen (kr) ?

$$e^r = 1 + r_{p.a.} = 1.03$$

$$r = \ln(1{,}03) = 2{,}95588\ldots\,\%$$

Avkastningen : $P(1/3 \text{ år}) - P_0$

$$= e^{r \cdot 1/3} P_0 - P_0 = P_0\left((e^r)^{1/3} - 1\right)$$

$$= P_0\left(\sqrt[3]{1{,}03} - 1\right)$$

$$= P_0(0{,}0099016 3\ldots) = \underline{\underline{9902 \text{ kr}}}$$