7. feb 2012

Cyberbook

nettside kunnskap.no

hioa

elev # # : nummer

elev # 1, 2, 3, 4, ...

Gi gjerne tilbakemelding på e-post.

Referer til hva spørsmålet dreier seg om.

For eksempel 3.3.6 er eksempelet med rasjonale implisitte funksjoner (som vi såg på i forelesningen).

Elevnummer ble delt ut i forelesningstimen. Dere kan også sende meg ein mail og be om å få tilsent et elevnummer.

Hvis noen glemmer passordet er det mulighet for at dere kan få nytt passord.

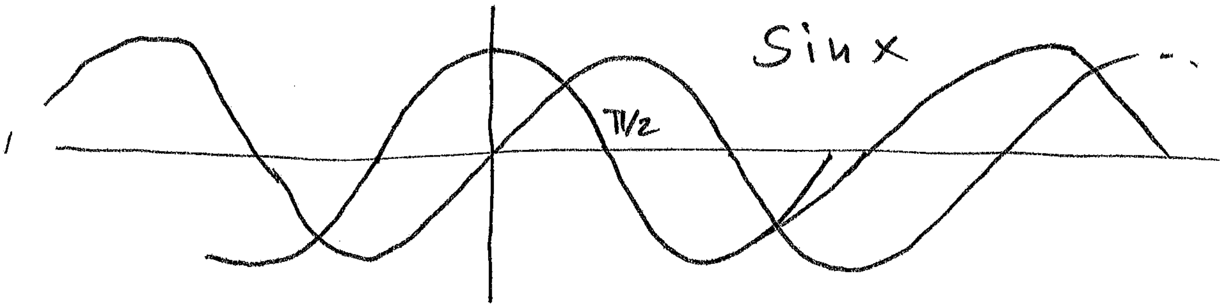
7.2.2012

10.8 Deriverte til sin x og cos x

(1)

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$



Eksempel

$$(3 \cdot \cos x - 1)'$$

$$= 3(\cos x)' - (1)'$$

$$= 3(-\sin x) - 0$$

$$= \underline{-3\sin x}$$

Her har vi brukt at derivasjon er en lineær operasjon

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x), \quad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Oppgave: Deriver $5(\sin(t-3) + t^2)$ (med hensyn til t)

$$\frac{d}{dt} 5(\sin(t-3) + t^2) = 5\left(\frac{d}{dt}\sin(t-3) + \frac{d}{dt}t^2\right)$$

$$= 5\left(\frac{d \sin(t-3)}{d\,t-3} \cdot \frac{d(t-3)}{dt} + 2t\right) = 5(\cos(t-3) \cdot 1 + 2t)$$

$$= \underline{5\cos(t-3) + 10t}$$

eksempel

(2) $(A\sin k(x-c) \quad + d)'$

$= A\ (\sin(k(x-c)))'$ (kjerneregelen)

$= A \quad \cos(k(x-c)) \cdot (k(x-c))'$

$= A \cdot \cos(k(x-c)) \cdot k$

$= \underline{A \cdot k \cos(k(x-c))}$.

oppgave Deriver $\sin x \cdot \cos x$

1) $(\sin x \cdot \cos x)' = (\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)'$

$= \cos x \cdot \cos x + \sin x\,(-\sin x)$

$= \underline{\cos^2 x - \sin^2 x}$

2) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ $\qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$(\sin x \cos x)' = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' = \frac{1}{2}\,\frac{d\sin(2x)}{d(2x)}\,\frac{d\,2x}{dx}$

$= \frac{1}{2}\cos(2x) \cdot 2 = \underline{\cos(2x)}$

(3) Bevis for at $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

Definisjonen av den deriverte

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

Addisjonsformelen $\sin(x+h) = \sin x\cdot\cos h + \sin h\cdot\cos x$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h - 1) + \sin h\cdot\cos x}{h}$$

$$= \sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

Resultat $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$ og $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0$

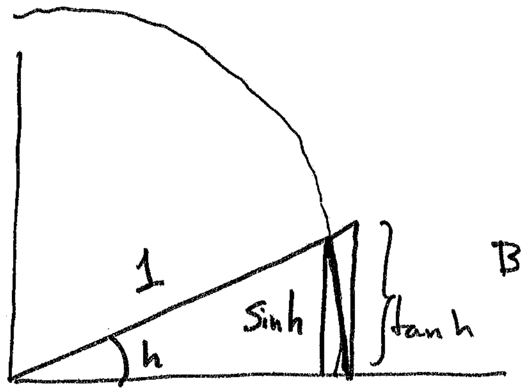
Derfor er $\frac{d}{dx}\sin x = \sin x\cdot 0 + \cos x\cdot 1$

$$= \underline{\underline{\cos x}}.$$

Vi skal vise at $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$.

$$\frac{\sin(-h)}{-h} = \frac{-\sin h}{-h} = \frac{\sin h}{h}$$

Det er derfor tilstrekkelig å syne at $\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin h}{h} = 1$.



$0 < h < \frac{\pi}{4}$

Buelengden ~~tan~~ er h.

$$\sin h < h$$

Arealet til den største trekanten: $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan h = \frac{\tan h}{2}$

> arealet til sirkelsegmentet $\frac{1}{2} 1^2 \cdot h = \frac{h}{2}$

$$\frac{h}{2} < \frac{\tan h}{2}$$

$h > 0$ så ulikhetene endres ikke når vi deler med h:

$$\frac{\sin h}{h} < 1 \quad , \quad 1 < \frac{\sin h}{h \cdot \cos h}$$

$$\cos h < \frac{\sin h}{h}$$

$$(\cos h > 0)$$

$$\cos(h) < \frac{\sin h}{h} < 1$$

$$\lim_{h \to 0^+} \cos h = 1$$

Derfor må $\underline{\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1-\cos h)}{h} \frac{(1+\cos h)}{(1+\cos h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin^2 h}{h(1+\cos h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{1+\cos h}$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}\right) \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{1+\cos h}\right)$$

$$= 1 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

Derfor er $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0.$

Vi har fullført ^beviset for^ at $(\sin x)' = \cos x$.

Vi har følgende grense (fra beviset ovenfor)

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{1}{1+\cos h}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Eksempel

$$(\sin^3 x)' = ((\sin x)^3)'$$

$$= 3(\sin x)^2 \cdot (\sin x)'$$ kjerneregelen

$$= 3(\sin x)^2 \cdot \cos x$$

$$= \underline{3\cos x \cdot \sin^2 x} \,. = 3\sin^2 x \cdot \cos x$$

$\sin\left(\frac{\pi \cdot x}{180}\right)$ x (grader) $u = \frac{\pi \cdot x}{180}$ radianer

$$\frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi \cdot x}{180}\right) = \frac{d \sin u}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \cos u \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$= \underline{\cos\left(\frac{\pi \cdot x}{180}\right) \cdot \frac{\pi}{180}} \,.$$

(Hvis x er i grader
er den deriverte til sin lik
$\frac{\pi}{180} \cdot \cos$.)