Løsningsforslag til Obligatorisk innlevering 7

Oppgave 1

a) Likningen $e^{2x} - 6e^x + 5 = 0$ er en annengradslikning i e^x. Siden $(-1) \cdot (-5) = 5$ og $-1 - 5 = -6$ så faktoriserer annengradsuttrykket som

$$(e^x - 5)(e^x - 1).$$

Dette er lik 0 når $e^x = 5$ og $e^x = 1$. Vi anveder funksjonen ln på begge sider av likhetene og får løsningene $\underline{x = 0}$ og $\underline{x = \ln 5}$ (≈ 1.609).

b) Likningen $3e^{4x} = 2$ er ekvivalent til $e^{4x} = 2/3$. Derfor er $4x$ lik

$$4x = \ln(2/3) = \ln(2) - \ln(3).$$

Løsningen til likningen er $\underline{x = (\ln(2) - \ln(3))/4} \approx -0.101$.

c) Likning $3e^{-2x} = 1 - 2e^{-x}$ er en annengradslikning i variabelen e^{-x}. Likningen er ekvivalent til

$$3(e^{-x})^2 + 2e^{-x} - 1 = 0.$$

Uttrykket faktoriserer som $(3e^{-x} - 1)(e^{-x} + 1)$. Alternativt kan ABC-formelen anvendes for å se at e^{-x} må være lik -1 eller $1/3$. Funksjone e^{-x} er altid positiv derfor har $e^{-x} = -1$ ingen løsning. Vi anvender ln-funksjonen på begger sider av $e^{-x} = 1/3$ og får $x = \ln 3$.

d) Likningen $2(e^x - e^{-x}) = 3$ er også et annengradsuttrykk i e^x. LIkningen er ekvivalent til (merk at $e^x > 0$ for alle x)

$$2(e^x)^2 - (3)e^x - 2 = 0.$$

Vi bruker ABC-formelen til å finne løsningene til annengradslikningen i e^x.

$$e^x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4}.$$

(Alternativt kunne vi ha sett at annengradsuttrykket faktoriserer som $(2e^x + 1)(e^x - 2)$.) Faktoren $(2e^x + 1)$ er aldrig lik 0. Løsningen til likningen er $\underline{x = \ln 2} \approx 0.693$.

e) Vi anvender ln-funksjonen på begge sider av likningen $9 \cdot 2^x = 4 \cdot 3^x$. Siden ln er en økende funksjon er den opprinnelige likningen ekvivalen til likningen $x\ln(2)+\ln(9) = x\ln(3)+\ln(4)$. Dette er en lineær likningen i x med løsning $x = (\ln(9)-\ln(4))/(\ln(3)-\ln(2)) = \ln((3/2)^2)/\ln(3/2) = 2$. Løsningen lik likningen er $\underline{x = 2}$.

Oppgave 2

a) Likningen $\ln(x-1) = 1$ er ekvivalen til $(x-1) = e^1 = e$. Løsningen til likningen er $\underline{x = e+1}$.

b) Likningen $\ln(x) - \ln(x-1) = 1$ er ekvivalent til $\ln(x/(x-1)) = 1$, siden logaritmefunksjoner "tar produkt til sum" og $-\ln(x-1) = \ln(1/(x-1))$ (så fremt $x > 1$ slik at den opprinnelige likningen er velldefinert). Dette er ekvivalent til $x/(x-1) = e$, som igjen er ekvivalent til den lineære likningen $x = e(x-1)$. Løsningen til likningen er $\underline{x = e/(e-1) \ \approx 1.58}$.

c) Likningen $\ln(2x-1)-\ln(8) = 2\ln(1-x)$ er ekvivalent til $\ln((2x-1)/8) = \ln((1-x)^2)$, under forutsettning av at $(1-x) > 0$. Dette er ekvivalent til $(2x-1)/8 = (1-x)^2$ siden ln er en økende funksjon. Dette er et annengradsliking i x

$$8x^2 - 18x + 9 = 0.$$

Annengradsuttrykket faktoriserer som $(2x-3)(4x-3)$. Alternativt kan vi bruke ABC-formelen. I alle tilfeller får vi at $x = 3/4$ eller $x = 3/2$. Verdien $x = 3/4$ er en løsningen til den opprinnelige likningen mens den andre verdien for $x = 3/2$ ikke er en løsning siden $1-x$ da er negativ (så $\ln(1-x)$ er meningsløs). Løsningen til likningen er $\underline{x = 3/4}$.

d) Likningen $\ln(x^2+3) = 2\ln(x+1)$ er ekvivalent til likningen

$$\ln(x^2+3) = \ln((x+1)^2)$$

så fremt $x+1 > 0$. Siden ln er en økende funksjon er dette ekvivalent til $(x^2+3) = (x+1)^2 = x^2+2x+1$. Dette er ekvivalent til den lineære likning $2x = 2$ i x. Løsningen til likningen er $\underline{x = 1}$.

e) Linkningen $(\ln(x))^2 - 1 = 4\ln(x)$ er en annengradslikning i variabel $\ln(x)$. Likningen er ekvivalent til

$$(\ln(x))^2 - 4\ln(x) - 1 = 0.$$

ABC-formelen gir at $\ln(x) = 2 \pm \sqrt{5}$. Løsningen til likningen er $\underline{x = e^{2-\sqrt{5}}} \approx 0.7897$ og $\underline{x = e^{2+\sqrt{5}}} \approx 69.135$.

Oppgave 3

a) Den deriverte til funksjonen $f(x) = e^{\cos x}$ er lik

$$f'(x) = e^{\cos x} \cdot (\cos x)' = \underline{-\sin x \cdot e^{\cos x}}.$$

b) Den deriverte til funksjonen $f(x) = \ln(\sin(5x))$ et lik

$$f'(x) = \frac{1}{\sin(5x)} \cdot (\sin(5x))' = \frac{1}{\sin(5x)} \cdot 5 \cdot \cos(5x) = \underline{\frac{5\cos(5x)}{\sin(5x)}}.$$

c) Den deriverte til funksjonen $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ er lik

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x})' = \underline{e^{\sqrt{x}}/(2\sqrt{x})}.$$

d) Den deriverte til funksjonen $f(x) = \ln(\sqrt{x+4}) = (1/2)\ln(x+4)$ er lik

$$f'(x) = \underline{1/(2(x+4))}.$$

e) Den deriverte til funksjonen $f(x) = (e^{2x})/(x+3) = e^{2x}(x+3)^{-1}$ er lik

$$f'(x) = (e^{2x} \cdot (2x)')(x+3)^{-1} + (e^{2x}) \cdot (-1)(x+3)^{-2} = \underline{e^{2x}\frac{2x+5}{(x+3)^2}}.$$

f) Den deriverte til funksjonen

$$f(x) = \log_3(x^2+1) - 2x + 3 = \ln(x^2+1)/\ln(3) - 2x + 3$$

er lik

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)'}{\ln(3)(x^2+1)} - 2 = \underline{\frac{2x}{\ln(3)(x^2+1)} - 2}.$$

g) Den deriverte til funksjonen $f(x) = 4^{2x+1} - 1 = e^{\ln(4)(2x+1)} - 1$ er lik

$$f'(x) = e^{\ln(4)(2x+1)}(\ln(4)(2x+1))' = 2\ln(4)e^{\ln(4)(2x+1)} = 2\ln(2^2)4^{(2x+1)}$$

$$= 4\ln(2)4^{2x+1} = \underline{\ln(2)4^{2x+2}}.$$

Oppgave 4 Vi studerer funksjonen $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ med definisjonsmengde $x > 0$.

a) Nullpunkter til $f(x)$ er verdier for x slik at $f(x) = 0$. Funksjonen $\ln(x)$ er 0 for $x = 1$ og ulik 0 for alle andre x. Derfor er nullpunktene til $f(x)$ $\underline{x = 1}$.

b) Den deriverte til $f(x)$ er lik

$$f'(x) = 2(\ln x)(\ln x)' \cdot (x^{-1}) + (\ln x)^2(-1)x^{-2}$$

$$= 2(\ln x)x^{-2} - (\ln x)^2)x^{-2} = \underline{\frac{\ln(x)(2 - \ln(x))}{x^2}}.$$

c) Funksjonen er deriverbar i hele definisjonsmengden. Grafen til $f(x)$ har ingen endepunkt. Derfor er de kritiske punktene de stasjonære punktene, dvs. punktene der hvor $f'(x) = 0$. $\ln(x) = 0$ når $x = 1$ og $\ln(x) = 2$ når $x = e^2$. Den deriverte $f'(x)$ er positiv for $1 < x < e^2$ og negativ for $0 < x < 1$ og $e^2 < x$. Derfor har $f(x)$ et bunnpunkt i $(1, 0)$ og et toppunkt i $(e^2, 4/e^2)$. Toppunktet er tilnærmet lik $(7.39, 0.541)$.

d) Siden $f(x)$ er større enn eller lik 0 for alle x i definisjonsmengden og $f(1) = 0$ så er den minste verdien til $f(x)$ lik 0.

e) Den deriverte til $f(x)$ i $x = 2$ er

$$f'(x) = \frac{\ln(2)(2 - \ln(2))}{2^2}$$

og $f(2) = (\ln(2))^2/2$ så tangenten til $f(x)$ i $x = 2$ er gitt ved

$$y = \frac{\ln(2)(2 - \ln(2))}{2^2}(x - 2) + (\ln(2))^2/2$$

$$\underline{y = \frac{\ln(2)(2 - \ln(2))}{4}x + \ln(2)(\ln(2) - 1)}.$$

f) Den dobbeltderiverte til $f(x)$ er

$$f''(x) = (\ln(x)(2 - \ln(x)))'x^{-2} + (\ln(x)(2 - \ln(x)))((x^{-2})')$$

$$= (2/x - 2\ln(x)/x)x^{-2} + (\ln(x)(2 - \ln(x)))(-2x^{-3}) = \underline{\frac{2((\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 1)}{x^3}}.$$

g) For å finne vendepunkt er det tilstrekkelig å undersøke x slik at $f''(x) = 0$ siden $f''(x)$ eksisterer for alle x i definisjonsmengden. Likningen $\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 1 = 0$ er et annengradsuttrykk i $\ln(x)$ Løsningene er

$$x = e^{(3 \pm \sqrt{5})/2}.$$

Den andrederiverte skifter fortegn for disse verdiene (se deloppgave h)). Vendepunktene er

$$(13.7087, 0.499998) \text{ og } (1.465, 0.09957).$$

h) Funksjonen er konveks når $f''(x) > 0$, og konkav når $f''(x) < 0$. Funksjonen er konveks for $0 < x < e^{(3-\sqrt{5})/2}$ og $e^{(3+\sqrt{5})/2} < x$. Funksjonen er konkav for $e^{(3-\sqrt{5})/2} < x < e^{(3+\sqrt{5})/2}$.

i) Se egen geogebra link.

j) Skjæringspunktet mellom $f(x)$ og funksjonen $4/(9x)$ er punkt hvor

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{4}{9x}.$$

Løsningen til likningen $4/9 = (\ln(x))^2$ er x slik at $\ln(x) = \pm 2/3$. Derfor er $x = e^{-2/3} \approx 0.5134$ og $x = e^{2/3} \approx 1.9477$. Setter vi disse verdiene inn i funksjonsuttrykket får vi at skjæringspunktene er

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}, \frac{4\sqrt[3]{e^2}}{9} \right) \text{ og } \left(\sqrt[3]{e^2}, \frac{4}{9\sqrt[3]{e^2}} \right).$$

Oppgave 5 Vi studerer funksjonen

$$f(x) = \frac{2xe^x}{x+4}$$

med definisjonsmengde $x \neq -4$.

a) Nullpunktet til funksjonen er $x = 0$.

b) Den deriverte til $f(x)$ er

$$f'(x) = 2e^x \left(\frac{x}{x+4} + \left(\frac{x}{x+4} \right)' \right) = 2e^x \left(\frac{x}{x+4} + \left(1 + \frac{-4}{x+4} \right)' \right)$$

$$= 2e^x \left(\frac{x}{x+4} + \frac{4}{(x+4)^2} \right) = 2e^x \left(\frac{x^2+4x+4}{(x+4)^2} \right) = \frac{2e^x(x+2)^2}{(x+4)^2}.$$

c) Funksjonen er deriverbar for alle x i definisjonsmengden og grafen til $f(x)$ har ingen endepunkt. De kritiske punktene er derfor de samme som de stasjonære punktene. De stasjonære punktene, hvor $f'(x) = 0$, er $x = -2$. Punktet er $(-2, f(-2)) = (-2, -2/e^2)$. Siden $f'(x) \geq 0$ for alle x i definisjonsmengden er $f(x)$ økende både i intervallen $x < -4$ og i intervallen $x > -4$. Derfor er det stasjonære punktet ikke et ekstremalpunkt.

d) Den dobbeltderiverte til $f(x)$ er

$$f''(x) = 2\left(e^x \cdot \left(\frac{x+2}{x+4} \right)^2 \right)' = 2e^x \left(\left(\frac{x+2}{x+4} \right)^2 + 2\frac{x+2}{x+4} \left(\frac{x+2}{x+4} \right)' \right)$$

$$= 2e^x \left(\left(\frac{x+2}{x+4} \right)^2 + 2\frac{x+2}{x+4} \left(\frac{2}{(x+4)^2} \right) \right) = 2e^x \frac{(x+2)((x+2)(x+4)+4)}{(x+4)^3}$$

$$= 2e^x \frac{(x+2)(x^2+6x+12)}{(x+4)^3} = 2e^x \frac{(x+2)((x+3)^2+3)}{(x+4)^3}.$$

e) Siden $f''(x)$ eksisterer for alle x i definisjonsmengden er det tilstrekkelig å undersøke x slik at $f''(x) = 0$ for å finne vendepunkt. Den andrederiverte til f er null når $x = -2$. Den andrederiverte skifter fortegn for $x = -2$.

Vendepunktet er $(-2, -2/e^2) \approx (-2, 0.270)$.

f) Funksjonen er konveks (konkav opp) når $f''(x) > 0$, og konkav (ned) når $f''(x) < 0$. Vi sjekker fortegnet til $f''(x)$. Funksjonen $f(x)$ er konkav for $-4 < x < -2$. Funksjonen $f(x)$ er konveks for $x < -4$ og $-2 < x$.

g) Se egen geogebra link.