13.10.2011

Oppgaver relatert til oblig 2.

(1)

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

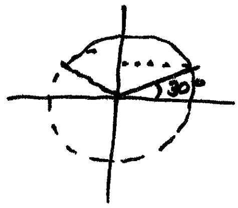
Finn alle løsningene slik at $0 \le x \le 2\pi$.

1) $2x = u$ $\quad\quad \sin u = \frac{1}{2}$

2) Bestemme $x = \frac{u}{2}$. i intervallen $[0, 2\pi]$.

---

1)



$\sin^{-1}\frac{1}{2} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ $(30°)$

Den andre løsningen mellom $-\pi/2$ og $3\pi/2$ er

$\pi - \arcsin\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ $(150°)$

Alle løsningene til $\sin u = \frac{1}{2}$ er

$$u = \frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot n$$

$$u = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot n$$

n heltall.

2) $x = \frac{u}{2} = \frac{\pi}{12} + \pi \cdot n$ (1)

eller $x = \frac{5\pi}{12} + \pi \cdot n$ (2)

n heltall.

Løsningene mellom 0 og 2π er

$$X = \left\{ \underbrace{\underbrace{\frac{\pi}{12}}_{n=0},\ \underbrace{\frac{13\pi}{12}}_{n=1}}_{(1)},\ \underbrace{\underbrace{\frac{5\pi}{12}}_{n=0},\ \underbrace{\frac{17\pi}{12}}_{n=1}}_{(2)} \right\}.$$

② Absoluttverdien til et reelt tall

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

$|5| = 5$ $\qquad |-2| = 2$ $\qquad |3-4| = 1.$

$$|2x-1| \geq x^2$$

$2x-1 \geq 0$

$2x \geq 1$

$\underline{x \geq 1/2}$

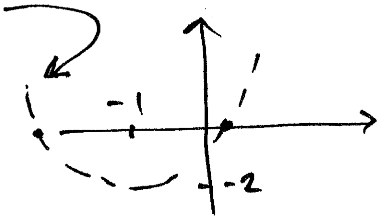
$$2x-1 \geq x^2$$
$$0 \geq x^2 - 2x + 1$$
$$0 \geq (x-1)^2$$

løsning $\underline{x=1}$

$2x-1 \leq 0$

$\underline{x \leq 1/2}$

$$1-2x \geq x^2$$
$$0 \geq x^2+2x-1 = \cancel{(x+1)^2}$$
$$0 \geq (x+1)^2 - 2$$
$$2 \geq (x+1)^2$$



Løsningen til $0 \geq (x+1)^2 - 2$ er alle x-verdier mellom nullpunktene til $(x+1)^2 - 2 = x^2+2x-1$.

løsningene er $x+1 = \pm\sqrt{2}$.

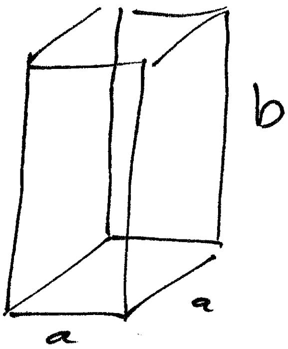
$$x = -1 \pm \sqrt{2}.$$

For $x \leq 1/2$ er løsningsmengden $[-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$

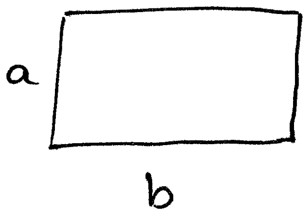
Løsningsmengden til $|2x-1| \geq x^2$ er

$$\underline{\underline{[-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}] \cup \{1\}}}$$

③



$a, b > 0$



Når er volumet lik arealet?

$V = a^2 \cdot b$ $\qquad A = a \cdot b$

$A = V$

$a \cdot b = a^2 \cdot b \qquad a, b > 0$

deler med a og b

$$\frac{a \cdot b}{a \cdot b} = \frac{a \cdot a \cdot b}{a \cdot b}$$

$\underline{\underline{1 = a}}$ og alle b.

Vi har ikke brukt enheter her.

Hadde vi brukt enheter ville vi fått

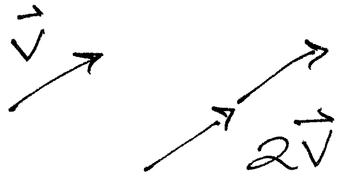
$a = 1$ (enhet for lengde).

12.4 Produkt av skalar og vektor

(4)

(element i)
$t \in \mathbb{R}$ reelt tall. Kalles gjerne en skalar.

$\vec{v}$ vektor



$2 \cdot \vec{v} = \vec{v} + \vec{v}$ $\qquad 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

$-1 \cdot \vec{v} = -\vec{v}$ motsattvektoren.

$t \cdot \vec{v}$ er en vektor med lengde

$|t| \cdot |\vec{v}|$ og samme retning som $\vec{v}$ $\quad t \geq 0$

motsatt retning som $\vec{v}$ $\quad t < 0$

$0 \cdot \vec{v} = \vec{0}.$

Regneregler:

$$s(t \cdot \vec{v}) = (s \cdot t)\vec{v}$$

$$(s+t)\vec{v} = s \cdot \vec{v} + t\vec{v}$$

$$t(\vec{u} + \vec{v}) = t \cdot \vec{u} + t\vec{v}$$

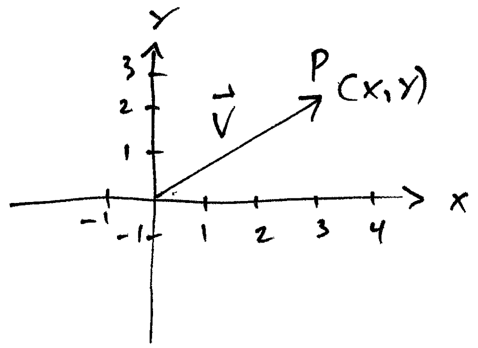
Hvis $\vec{v} \neq \vec{0}$, da er $\vec{v}$ og $\vec{u}$ parallelle vektorer hvis og bare hvis det finnes en skalar t slik at $t \cdot \vec{v} = \vec{u}$.

(Hvis $\vec{v} = 0$ er $\vec{u}$ og $\vec{v}$ parallelle selv om det ikke finnes en slik t.)

(5)

12.5 Vektorer på koordinatform.

(Vektorer i et koordinatsystem)



$\vec{v}$ er en vektor.

La $\vec{v}$ starte i origo og la $P = (x, y)$

være endepunktet til $\vec{v}$.

Vi betegner $\vec{v} = [x, y]$.

(Vi bruker klammeparantes for å skille vektorer fra punkt.)

Hvis $[x_1, y_1] = [x_2, y_2]$, da er $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Lengden til $\vec{v} = [x, y]$ er $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Hvis $|\vec{v}| = 0$, da er $\vec{v} = \vec{0}$.

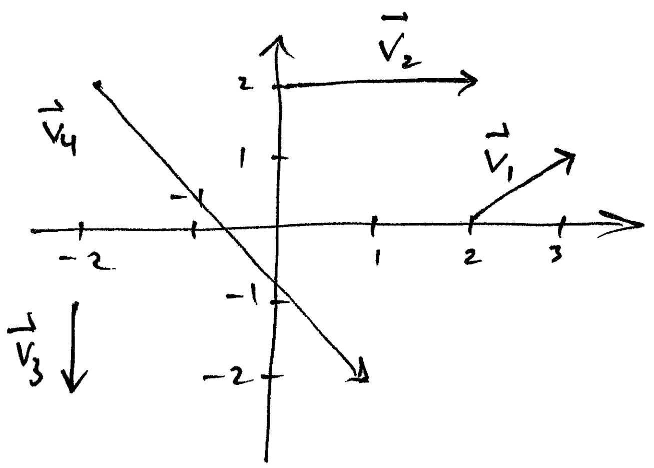
En enhetsvektor er en vektor med lengde 1.

$\vec{i} = \vec{e}_1 = [1, 0]$ $\quad \vec{j} = \vec{e}_2 = [0, 1]$ er enhetsvektorer.

dette er i

$$\underline{\vec{v} = [x, y] = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2}.$$

⑥ Finn vektorkoordinatene til vektorene



$\vec{v}_1 = [1, 1]$
$\vec{v}_2 = [2, 0]$
$\vec{v}_3 = [0, -1]$
$\vec{v}_4 = [3, -4]$

Vektorlikninger

* Hastighetsvektoren for en ball som kastes er $\vec{v} = [a, b - gt]$

Når er hastighetsvektoren horisontal? (parallell med x-aksen)

Når y-komponenten er 0 : $b - g \cdot t = 0$
$\underline{t = \frac{b}{g}}$

* Bestem s slik at
$\vec{v} = [s, 2]$ og $\vec{u} = [s^2, 1 - s]$
blir parallelle. →

7. Vektoren $\vec{v}$ er alltid ulik $\vec{0}$.

Derfor er $\vec{v}$ og $\vec{u}$ parallelle hvis og bare hvis det finnes en t slik at

$$t\vec{v} = \vec{u}$$

$$[t\cdot s, 2\cdot t] = [s^2, 1-s].$$

$$t\cdot s = s^2 \quad : \quad s=0 \text{ eller } t=s$$
$$2t = 1-s$$

$s=0$ er en løsning : $\frac{1}{2}[0,2] = [0,1]$

Sjekker tilfellet $t=s$: $2s = 2t = 1-s$

så $3s = 1$

$s = 1/3$

test: $\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}, 2\right] = \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{3}\right]$.

Løsningene er $\underline{\underline{s=0}}$ og $\underline{\underline{s=\frac{1}{3}}}$