11 oktober 2011

(1)

7.8 Addisjonsformlene for cos og sin

$$\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$

$$\sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \sin v \cdot \cos u$$

$$\tan(u+v) = \frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)} = \frac{\sin u \cos v + \sin v \cos u}{\cos u \cos v - \sin v \sin u}$$

$$= \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \cdot \tan v}.$$ hvor gyldig

7.9 Dobbling av vinkel.

Setter $u = v$ i addisjonsformlene.

$$\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u$$

$$\sin(2u) = 2\sin u \cdot \cos u.$$

Pytagoras: $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$

Derfor er $\cos(2u) = \cos^2 u - (1 - \cos^2 u)$

$$= \cos^2 u - 1 + \cos^2 u$$

$$\boxed{\cos(2u) = 2\cos^2 u - 1}$$

$$\boxed{\cos(2u) = 1 - 2\sin^2 u.}$$

$$\cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}$$

$$\cos u = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2u}{2}}.$$

$$\sin u = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2u}{2}}$$

(2)

$$\sin(22{,}5^\circ) = +\sqrt{\frac{1-\cos(45^\circ)}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - 1/\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\cdot\sqrt{2}}}.$$

(positive siden vinklene er i første kvadrant)

$$\cos(15^\circ) = +\sqrt{\frac{1+\cos(30^\circ)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\cdot 2}} = \underline{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$$

Dette er lik $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (fra forrige gang)

siden $(\sqrt{3}+1)^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\cdot\sqrt{3} + 1 = 2(2+\sqrt{3})$.

Digresjon: $A\sin x + B\cos x$ kan altid skrives

som (er lik) $c\cdot\sin(x+d)$ for passende c og d.

Hva er c og d?

$$c\sin(x+d) = (c\cos(d))\cdot\sin x + (c\sin(d))\cos x$$

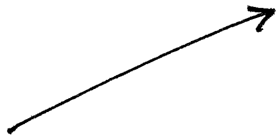
$$c\cos d = A \qquad c\sin d = B.$$

Hvis $A = 0$: $B = c$ og $d = \frac{\pi}{2}$

Hvis $A \neq 0$: $\tan d = \frac{B}{A}$ og $c = A/\cos d$.

12 Vektorer

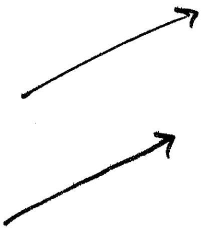
En (ikke-null) vektor har retning og størrelse.



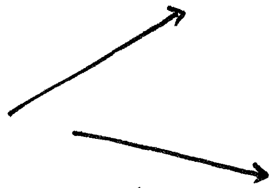
symbol for vektorer: $\vec{v}$, $\vec{u}$, $\vec{w}$ ...

størrelsen til en vektor $|\vec{v}|$

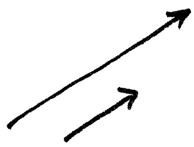
To vektorer med samme retning og størrelse er like.



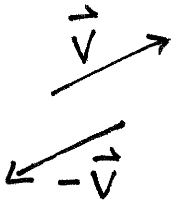
like



ulike



ulike



ulike.

Nullvektoren $\vec{0}$ har lengde (størrelse) 0 og ingen retning.

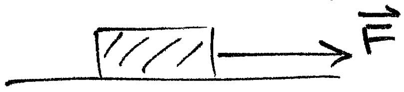
Motsattvektoren $-\vec{v}$ til $\vec{v}$ har samme størrelse og motsatt retning.

$-\vec{0} = \vec{0}$

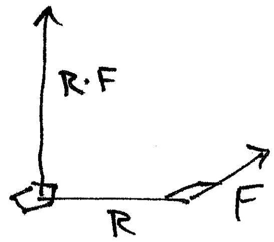
(4) To vektorer er parallelle hvis de har samme retning eller motsatt retning.
$\vec{0}$-vektoren er parallell med alle vektorer.

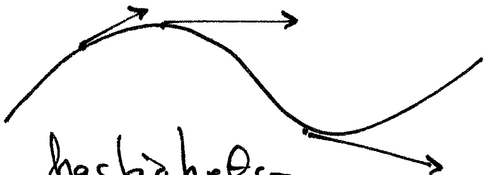
Eksempler på vektorer i fysikk.

kraftvektor



Kraftmoment

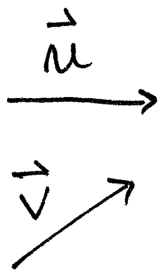




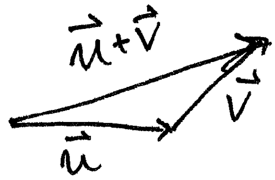
hastighets-vektorer

absoluttverdien til hastighets-vektoren kalles farten.

12.2 Sum av vektorer

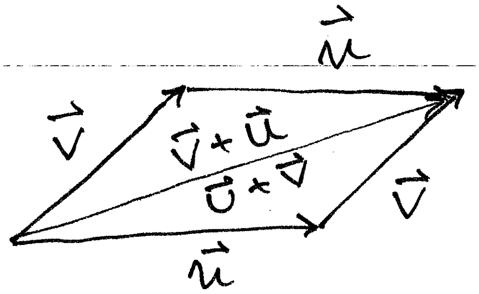


summen $\vec{u}+\vec{v}$



$$\vec{0}+\vec{u} = \vec{u}+\vec{0} = \vec{u}.$$

Addisjon er kommutativ $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$



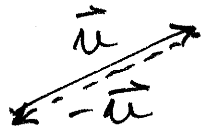
(5) Addisjon er assositiv

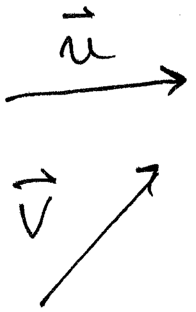
$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

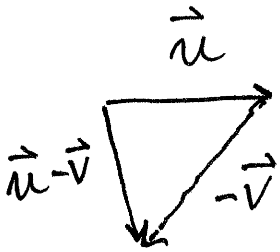
12.3 Differanse av vektorer

$$\vec{u}-\vec{v} = \vec{u}+(-\vec{v})$$

$$\vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{0}$$

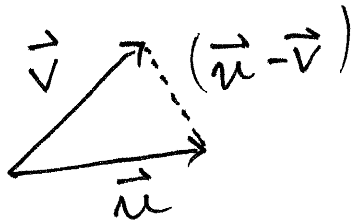






$$(\vec{u}-\vec{v})+\vec{v} = \vec{u}$$

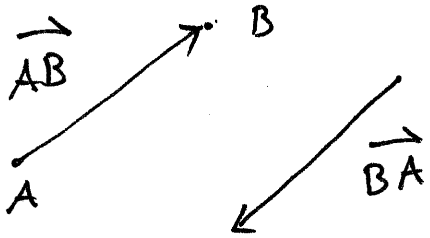
(siden $\vec{u}+(-\vec{v})+\vec{v} = \vec{u}+\vec{0} = \vec{u}$)



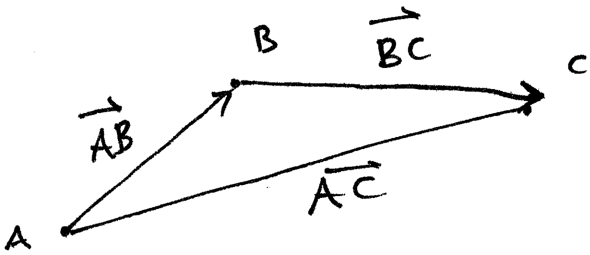
$\vec{u}-\vec{v}$ er vektoren vi må legge til $\vec{v}$ ~~fora~~ å få $\vec{u}$.

Punkt og vektorer

(slutten av 12.1)



$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}. = -\overrightarrow{CA}.$$

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$